

*Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia*

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA

***ANALISI NUMERICA DI  
UN AMPLIFICATORE OTTICO  
PER TELECOMUNICAZIONI***

Relatore:

**Chiar.mo Prof. Ing. Maurizio Zoboli**

Tesi di Laurea:

**Moreno Maini**

Correlatore:

**Dott. Ing. Luca Vincetti**

Controrelatore:

**Prof. Ing. Fausto Fantini**

---

Anno Accademico 2001 - 2002

*e poi la luce,  
luce che trasforma il mondo in un giocattolo*

Fabrizio De André, *Un ottico*



# Ringraziamenti

Desidero ringraziare il professore Maurizio Zoboli per avermi dato la possibilità di comprendere la materia, stimolandomi ad un continuo studio ed approfondimento personale.

Ringrazio l'ingegnere Luca Vincetti per la competenza ed i preziosi aiuti che mi ha dato durante tutto il lavoro di questa tesi, rendendomi più "umano" grazie alla sua ironia e simpatia.

Ringrazio i miei genitori e le mie nonne per il costante sostegno datomi... non intendo solo dal lato economico! La loro presenza è stata indispensabile per il raggiungimento della laurea. Grazie!

Non potrò mai essere abbastanza riconoscente alla Paolina per essermi stata vicina con il suo amore e la sua cucina, sopportandomi anche nei momenti in cui sono stato intrattabile.

Infine ringrazio i miei amici che in tutti questi anni di vita mi sono stati accanto, fuori e dentro l'Università.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 L'amplificazione ottica</b>	<b>5</b>
1.1 Interazione tra radiazione e materia . . . . .	6
1.2 Il sistema a tre livelli . . . . .	7
1.3 Le <i>propagation rate equations</i> . . . . .	12
1.4 Le <i>cross sections</i> . . . . .	15
<b>2 Il modello spaziale per l'amplificatore</b>	<b>19</b>
2.1 Il simulatore basato sul modello spaziale: SPAZGAIN . . . . .	24
2.2 Applicazione alle fibre a cristalli fotonici . . . . .	30
<b>3 Il modello <math>z</math>-invariante per l'amplificatore</b>	<b>55</b>
3.1 Il problema elettromagnetico . . . . .	60
3.2 Le <i>population rate equations</i> . . . . .	64
3.3 Caratterizzazione delle <i>cross sections</i> . . . . .	70

---

<b>4</b>	<b>Il progetto del simulatore</b>	<b>83</b>
4.1	La struttura di EDH15AMPLI . . . . .	85
4.2	Determinazione delle <i>cross sections</i> . . . . .	91
4.3	Il metodo degli elementi finiti . . . . .	93
4.4	Utilizzo della subroutine NS02AD . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Confronto e analisi dei risultati</b>	<b>105</b>
5.1	Fibra <i>Step</i> . . . . .	106
5.2	Guida d'onda rettangolare . . . . .	124
5.3	Fibra a cristalli fotonici . . . . .	131
	<b>Conclusioni</b>	<b>142</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>147</b>

# Elenco delle figure

1.1	Sistema a 3 livelli energetici . . . . .	8
2.1	Iterazioni per l'integrazione delle <i>population rate equations</i> . . .	23
2.2	Sezione di <i>input/output</i> di SPAZGAIN . . . . .	25
2.3	Diagramma di flusso di SPAZGAIN . . . . .	29
2.4	Geometria della fibra a cristalli fotonici triangolare a 7 anelli .	30
2.5	Componente dominante $H_{11}^x$ del modo a $\lambda = 1560 \text{ nm}$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $d/\Lambda = 0.35$ e $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ . . . . .	33
2.6	Componente dominante $H_{11}^x$ del modo a $\lambda = 1560 \text{ nm}$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $d/\Lambda = 0.8$ e $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ . . . . .	34
2.7	Componenti dominanti $H_{11}^x$ dei modi a $\lambda = 1560 \text{ nm}$ , nelle <i>PCF</i> triangolari, con $d/\Lambda = 0.35$ e diverse $\Lambda$ : $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ e $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ . . . . .	35
2.8	Componenti $H_{11}^x$ per i modi alle lunghezze d'onda di pompa e segnale, nelle <i>PCF</i> triangolari, con $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ e diversi $d/\Lambda$ : $d/\Lambda = 0.35$ e $d/\Lambda = 0.8$ . . . . .	37



2.9	Andamento di $P_s(z)$ al variare di $r_d$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $d/\Lambda = 0.35$ e $\Lambda = 2.3 \mu m$ . . . . .	39
2.10	Andamento di $G_{dB}(\lambda)$ al variare di $r_d$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $d/\Lambda = 0.35$ e $\Lambda = 2.3 \mu m$ . . . . .	40
2.11	Andamento di $P_s(z)$ al variare di $d/\Lambda$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $\Lambda = 3.45 \mu m$ ed $r_d = 1.5 \mu m$ . . . . .	41
2.12	Andamento di $P_s(z)$ al variare di $d/\Lambda$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $\Lambda = 3.45 \mu m$ ed $r_d = 6 \mu m$ . . . . .	42
2.13	Componenti $H_{11}^x$ per i modi alle lunghezze d'onda di pompa e segnale, nelle <i>PCF</i> triangolari, con $\Lambda = 3.45 \mu m$ e diversi $d/\Lambda$ : $d/\Lambda = 0.35$ e $d/\Lambda = 0.8$ . . . . .	43
2.14	Andamento di $P_s(z)$ al variare di $d/\Lambda$ , nelle <i>PCF</i> triangolari prese in esame . . . . .	47
2.15	Andamento di $P_s(z)$ al variare di $\Lambda$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $d/\Lambda = 0.35$ ed $r_d = 2 \mu m$ . . . . .	48
2.16	Andamento di $P_s(z)$ al variare di $\Lambda$ ed $r_d$ , nella <i>PCF</i> triango- lare, con $d/\Lambda = 0.35$ . . . . .	49
2.17	Lunghezze ottime in funzione di $r_d$ , per la <i>PCF</i> triangolare, con $\Lambda = 3.45 \mu m$ , al variare di $d/\Lambda$ . . . . .	50
2.18	Andamento di $P_s(z)$ al variare di $L$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $d/\Lambda = 0.35$ , $\Lambda = 2.3 \mu m$ ed $r_d = 2 \mu m$ . . . . .	51
2.19	Andamento di $G_{dB}(\lambda)$ al variare di $L$ , nella <i>PCF</i> triangolare, con $d/\Lambda = 0.35$ e $\Lambda = 2.3 \mu m$ ed $r_d = 2 \mu m$ . . . . .	52

---

2.20	Andamento di $P_s(z)$ nella <i>PCF</i> triangolare in regime di multimodalità, con i modi secondari fortemente attenuati . . . . .	53
3.1	Diagramma di flusso del modello del solutore modale per l'amplificatore . . . . .	59
3.2	Sistema a 4 livelli energetici, con i fenomeni di <i>up-conversion</i> e di <i>cross relaxation</i> . . . . .	66
3.3	Allargamento dei livelli energetici dello ione $Er^{3+}$ . . . . .	71
3.4	<i>Cross sections</i> di assorbimento ed emissione ottenute dalla sovrapposizione delle <i>lorentziane</i> indicate nella tabella 3.1 . . .	81
4.1	Schema a blocchi del software del simulatore dell'amplificatore ottico basato sul solutore modale . . . . .	84
4.2	Sezione di <i>input/output</i> di EDH15AMPLI . . . . .	85
4.3	Diagramma di flusso di EDH15AMPLI . . . . .	89
4.4	Generico elemento triangolare $\Omega_e$ del secondo ordine . . . . .	90
4.5	Esempio di funzione <i>lorentziana</i> . . . . .	92
5.1	Geometria della sezione trasversa della fibra ottica di tipo <i>step</i>	106
5.2	Particolare della <i>mesh</i> relativa al quarto di sezione della fibra <i>Step</i> . . . . .	107
5.3	<i>Cross sections</i> di assorbimento ed emissione ottenute dalla sovrapposizione delle <i>lorentziane</i> indicate nella tabella 5.1 . . .	109
5.4	Componenti dominanti $H_{11}^x$ dei modi alle lunghezze d'onda di pompa e di segnale, nella fibra <i>step</i> , con $r_{co} = 2.2 \mu m$ . . . . .	111

5.5	Andamento di $G_{dB}$ in funzione della lunghezza $L$ della fibra <i>step</i> , considerando sia il sistema a 2 livelli che il sistema a 4 livelli	112
5.6	Andamenti percentuali di $N_1(z)$ ed $N_2(z)$ nella fibra <i>step</i> , considerando il sistema a 4 livelli	113
5.7	Andamento di $G_{dB}(\lambda)$ nella fibra <i>step</i> , considerando sia il sistema a 2 livelli che il sistema a 4 livelli	114
5.8	Andamento di $G_{dB}$ nella fibra <i>step</i> , al variare della concentrazione del drogante $N_T$ , considerando sia il sistema a 2 livelli che il sistema a 4 livelli	115
5.9	Ingrandimento della figura 5.8 sui valori bassi di $N_T$	116
5.10	Risultati delle simulazioni effettuate da EDH15AMPLI sulla fibra <i>step</i> , variando il numero di elementi triangolari della <i>mesh</i>	117
5.11	Risultati delle simulazioni effettuate da SPAZGAIN sulla fibra <i>step</i> , variando il numero di elementi triangolari della <i>mesh</i>	118
5.12	Attenuazione $\alpha(dB/m)$ introdotta dalla fibra <i>step</i> drogata con erbio	119
5.13	Variazione percentuale di $\beta/k_0$ nella fibra <i>step</i> , dovuta alla presenza del drogante, al variare di $N_T$ e $P_p$	120
5.14	Andamento di $N_1(x, y)$ ed $N_2(x, y)$ sulla sezione trasversale della fibra <i>step</i>	122
5.15	Andamento di $\chi'_{Er}(x, y)$ e di $-\chi''_{Er}(x, y)$ sulla sezione trasversale della fibra <i>step</i>	123
5.16	Geometria della sezione trasversale della guida d'onda rettangolare	124

5.17 Particolare della <i>mesh</i> relativa al quarto di sezione della guida d'onda rettangolare . . . . .	125
5.18 <i>Cross sections</i> di assorbimento ed emissione ottenute dalla sovrapposizione delle <i>lorentziane</i> indicate nella tabella 5.2 . . .	126
5.19 Componenti dominanti $H_{11}^x$ dei modi alle lunghezze d'onda di pompa e di segnale, nella guida d'onda rettangolare . . . . .	128
5.20 Andamento di $G_{dB}$ nella guida d'onda rettangolare, al variare della concentrazione del drogante $N_T$ , considerando sia il sistema a 2 livelli che il sistema a 4 livelli . . . . .	129
5.21 Ingrandimento della figura 5.20 sui valori bassi di $N_T$ . . . . .	130
5.22 Andamenti percentuali di $N_1(z)$ ed $N_2(z)$ nella fibra <i>step</i> , considerando il sistema a 4 livelli . . . . .	131
5.23 Geometria della sezione trasversa della fibra a cristalli fotonici triangolare a 3 anelli . . . . .	132
5.24 Particolare della <i>mesh</i> relativa al quarto di sezione della <i>PCF</i> triangolare . . . . .	133
5.25 Componenti dominanti $H_{11}^x$ dei modi alle lunghezze d'onda di pompa e di segnale, nella <i>PCF</i> triangolare a 3 anelli, con $\Delta = 2.3 \mu m$ e $d/\Lambda = 0.6$ . . . . .	134
5.26 Andamento di $G_{dB}$ in funzione della lunghezza $L$ della <i>PCF</i> triangolare, per due diversi valori del raggio della zona drogata: $r_d = 0.5 \mu m$ ed $r_d = 1.0 \mu m$ . . . . .	135

- 
- 5.27 Andamento di  $G_{dB}$  in funzione del raggio della zona drogata  $r_d$ , nella  $PCF$  triangolare, per diversi valori della lunghezza dell'amplificatore:  $L = 0.5 m, L = 1.0 m$  ed  $L = 1.5 m$  . . . . . 136
- 5.28 Variazione percentuale di  $\beta/k_0$  nella fibra *step*, dovuta alla presenza del drogante, al variare di  $N_T$  e  $P_p$ , per  $P_s = 1 \mu m$  . 137
- 5.29 Variazione percentuale di  $\beta/k_0$  nella fibra *step*, dovuta alla presenza del drogante, al variare di  $N_T$  e  $P_p$ , per  $P_s = 10 \mu m$  . 138
- 5.30 Andamento di  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$  sulla sezione trasversale della  $PCF$  triangolare . . . . . 140

# Elenco delle tabelle

2.1	Valori assegnati ai parametri geometrici delle <i>PCF</i> triangolari, nelle simulazioni svolte . . . . .	31
2.2	Attenuazione che subisce il primo modo secondario che si propaga nella <i>PCF</i> triangolare con due anelli . . . . .	36
2.3	Attenuazione che subisce il primo modo secondario che si propaga nella <i>PCF</i> triangolare con tre anelli . . . . .	37
3.1	Parametri delle <i>lorentziane</i> utilizzate per l'approssimazione delle <i>cross sections</i> di assorbimento e di emissione, mostrate in figura 3.4 . . . . .	80
4.1	Soluzioni delle <i>population rate equations</i> , ottenute con la subroutine della <i>Harwell</i> NS02AD, al variare del parametro di accuratezza ACC . . . . .	102
4.2	Soluzioni delle <i>population rate equations</i> , ottenute con la subroutine della <i>Harwell</i> NS02AD, al variare del numero di iterazioni eseguite . . . . .	102

5.1	Parametri delle <i>lorentziane</i> utilizzate per l'approssimazione delle <i>cross sections</i> di assorbimento e di emissione, mostrate in figura 5.3 . . . . .	108
5.2	Parametri delle <i>lorentziane</i> utilizzate per l'approssimazione delle <i>cross sections</i> di assorbimento e di emissione, mostrate in figura 5.18 . . . . .	125

# Introduzione

L'uso della luce per la comunicazione può essere fatto risalire ai primordi della storia delle relazioni umane, ma il suo utilizzo in un sistema di comunicazioni “moderno” è il risultato di alcuni decenni di intense ricerche, che hanno interessato diversi campi, dall'elettronica quantistica alla tecnologia dei materiali, dalla fisica dei semiconduttori alla teoria delle comunicazioni. I primi passi verso la realizzazione di sistemi di comunicazioni ottiche risalgono ai primi anni '60, con la scoperta del *laser*: la disponibilità di questa nuova sorgente di onde elettromagnetiche, alla lunghezza d'onda della luce, ha infatti aperto le porte, all'uso per le telecomunicazioni, di un nuovo ampissimo spettro di frequenze.

Nel '70, l'avvento delle fibre ottiche a basse perdite, permise di guidare la luce attraverso percorsi non rettilinei. Così si aprì la frenetica corsa degli anni successivi, alla ricerca e allo sviluppo di sistemi di trasmissione ottica, più affidabili e perfezionati. I concetti accennati hanno avuto la loro più ampia evoluzione negli anni recenti, grazie all'impiego degli amplificatori ottici. Questi dispositivi permettono di amplificare la luce che li attraversa, compensando le perdite che il segnale subisce, senza bisogno di convertirlo in un segnale elettrico. È infatti vantaggioso, in termini di prestazioni (banda disponibile) e costi, realizzare il maggior numero possibile di elaborazioni e



instradamenti sui segnali, direttamente a livello ottico. Oggi lo scopo principale è appunto l'integrazione, su di un unico *chip*, di dispositivi ottici in grado di implementare tutte le operazioni necessarie nei sistemi di comunicazione, ma anche di elaborazione, concorrendo alla tecnologia dei semiconduttori.

La presente tesi si inquadra in questo ambito. Lo scopo è lo studio di un modello per gli amplificatori ottici. In particolare, i dispositivi a cui si fa riferimento sono le guide d'onda, le fibre ottiche e le più moderne fibre a cristalli fotonici, drogate con terre rare. Queste strutture, costituite da silice, possono essere rese attive, e quindi in grado di produrre amplificazione ottica, con l'introduzione di piccole quantità di materiale drogante. I risultati migliori si ottengono utilizzando l'erbio come drogante, in concentrazioni dell'ordine delle cento parti per milione. Lo ione d'erbio  $Er^{3+}$ , infatti, consente l'amplificazione nella terza finestra delle comunicazioni ottiche (intorno a  $1550\text{ nm}$ ), cioè proprio in corrispondenza del minimo di attenuazione delle fibre in silice. Tali dispositivi possono essere impiegati per numerosi compiti:

- come amplificatore di potenza (*booster*) per incrementare la potenza del segnale modulato da trasmettere,
- come preamplificatore di segnale per incrementare la sensibilità del ricevitore amplificando il debole segnale ricevuto prima della rivelazione,
- come ripetitore rigenerativo (amplificatore di linea) per collegamenti multitratta a lunga distanza.
- come compensatore delle perdite di suddivisione in reti di distribuzione completamente ottiche.

Inoltre, l'enorme banda a disposizione, ne consente l'impiego in sistemi a moltiplicazione di lunghezza d'onda (*WDM*). Per ragioni di miniaturizzazione e

di costi, è conveniente realizzare dispositivi utilizzando tratti brevi di guida d'onda o di fibra, con elevate concentrazioni d'erbio, necessarie per mantenere alte le qualità di amplificazione. Tuttavia, ad elevate concentrazioni, i fenomeni di interazione fra ioni d'erbio, alterano il comportamento dei sistemi, riducendone l'efficienza.

Il lavoro sviluppato in questa tesi è stato rivolto, innanzitutto, allo studio dei modelli “classici” per gli amplificatori ottici. La modellizzazione di un dispositivo consiste nella ricerca di un schema teorico che ne descriva il comportamento. Non esistendo modelli esatti, si ricorre a modelli approssimati, basati su equazioni di propagazione, impossibili da risolvere analiticamente, quindi risolte con tecniche numeriche. La descrizione del comportamento di un amplificatore ottico necessita anche della conoscenza delle distribuzioni dei campi elettromagnetici nelle sezioni trasverse delle strutture studiate. A tal fine il problema analitico viene risolto attraverso un metodo numerico, il *metodo degli elementi finiti*, che consente lo studio della propagazione elettromagnetica in dispositivi complessi, senza dovere ricorrere a particolari ipotesi semplificative. Successivamente si sono apprese le modalità di utilizzo del software, disponibile in questa Università, del simulatore per l'amplificatore ottico, basato sul modello descritto.

La sua complessità computazionale è molto elevata, perciò è sorta la necessità di avere un modello meno “pesante”, che permetta una descrizione del comportamento dell'amplificatore ottico più veloce computazionalmente. A tale proposito si è preso in considerazione un modello alternativo, proposto in letteratura, [Her99], il quale sfrutta un approccio completamente diverso: il problema elettromagnetico rimane sostanzialmente invariato, ma spariscono le equazioni di propagazione. Si vedrà che il prezzo da pagare per la semplificazione del modello, è una maggiore approssimazione sulle previsioni del

comportamento degli amplificatori ottici analizzati. Dopo una prima fase di studio teorico del modello, si è implementato il software del simulatore. In particolare, attraverso l'adozione di un modello più complesso, sono stati considerati gli effetti delle interazioni tra ioni d'erbio, significativi per alte concentrazioni del drogante.

Infine, è stata valutata la validità del modello introdotto: sono stati predetti i comportamenti, in termini di amplificazione, di alcune delle tipiche strutture drogate con erbio: fibra ottica, guida d'onda e fibra a cristalli fotonici. I risultati sono quindi stati confrontati con quelli ottenuti dal simulatore basato sul modello "classico" e dove è stato possibile, con quelli presenti in letteratura.

# Capitolo 1

## L'amplificazione ottica

Il problema dell'amplificazione ottica necessita della descrizione a livello microscopico dei meccanismi con i quali il campo elettromagnetico interagisce con la materia [Sve89]. Tale descrizione richiede un approccio quantistico. Il comportamento di una singola particella è regolata dalla soluzione dell'equazione di *Schroedinger*. In realtà negli amplificatori ottici si ha a che fare con sistemi costituiti da più particelle, che rispondono ad equazioni più complesse, ma sostanzialmente simili alla precedente. In particolare variano le condizioni al contorno, espresse tramite l'energia potenziale della particella. In questo caso, tali condizioni dipendono, oltre che dai campi elettromagnetici esterni, anche dall'iterazione con le altre particelle.

In questa trattazione quello che interessa è sapere che un elettrone, assegnata una certa distribuzione di potenziale, non può assumere valori arbitrari di energia, ma solo livelli ben definiti. Considerando un insieme di tanti elettroni, ognuno di essi assume un particolare valore di energia, contribuendo alla formazione di varie popolazioni, ognuna delle quali contraddistinta da un particolare livello di energia.

## 1.1 Interazione tra radiazione e materia

L'amplificazione ottica sfrutta particolari meccanismi fisici di interazione tra la materia e la radiazione incidente. Tali meccanismi sono gli stessi che intervengono nel funzionamento del *laser* [Sve89]. Si pensi ad una radiazione monocromatica di frequenza  $\nu$ , che incide su di un mezzo materiale composto da una certa densità di atomi, i quali sono caratterizzati da due livelli energetici, la cui differenza  $\Delta E = E_2 - E_1$ , corrisponde all'energia  $E = h\nu$  dei fotoni costituenti il campo incidente; dove  $h$  è la costante di *Planck*. Possono verificarsi i seguenti fenomeni:

*Emissione spontanea:* un elettrone decade spontaneamente dal livello ad energia  $E_2$  a quello ad energia  $E_1$ , con emissione di un fotone avente energia pari a  $\Delta E = E_2 - E_1$ .

*Emissione stimolata:* un fotone interagisce con un atomo al livello energetico  $E_2$ , stimolando la transizione di un elettrone da  $E_2$  a  $E_1$ , quindi la contemporanea emissione di un ulteriore fotone, temporalmente coerente e con la sua stessa polarizzazione.

*Assorbimento:* un fotone interagisce con un atomo al livello energetico  $E_1$ , viene da esso assorbito, provocando la transizione di un elettrone dal livello energetico  $E_1$ , al livello energetico  $E_2$ .

*Decadimento non radiativo:* un elettrone decade spontaneamente dal livello ad energia  $E_2$  a quello ad energia  $E_1$ , senza l'emissione di alcun fotone. L'energia corrispondente alla transizione elettronica viene dissipata in fenomeni non radiativi (ad esempio l'interazione fotone-fonone).

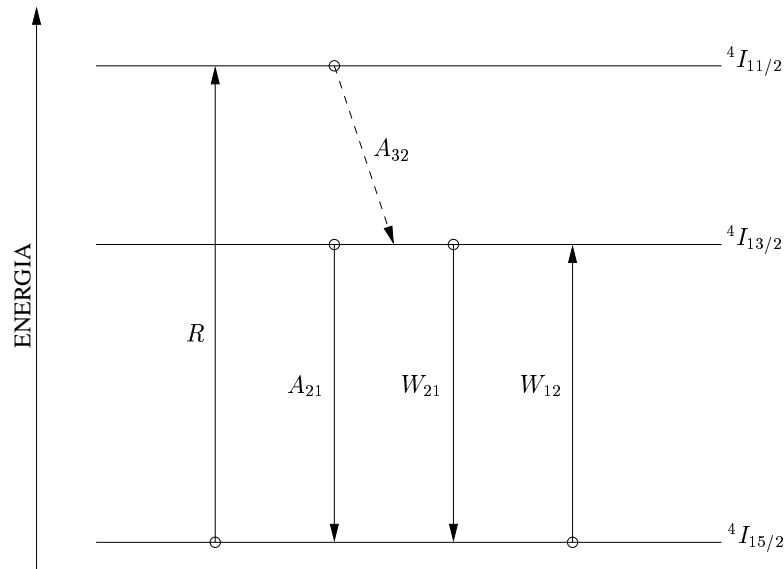
Il materiale attivo che si utilizza nella realizzazione di amplificatori ottici è il vetro drogato con ioni di terre rare, il drogante più importante è l'erbio. I comportamenti dei diversi materiali dipendono dalle probabilità di transizione relative ai vari fenomeni, valutate attraverso la meccanica quantistica. In analogia al funzionamento del *laser*, nell'amplificatore ottico è presente un sistema di pompaggio: un *laser* di pompa, la cui lunghezza d'onda deve corrispondere ad uno dei picchi di assorbimento del materiale attivo, per poter essere utilmente assorbita, consente di ottenere inversione di popolazione fra i livelli energetici corrispondenti alla lunghezza d'onda del segnale d'ingresso. In queste condizioni, i fotoni costituenti il segnale che incidono sul mezzo, provocano dei processi di emissione stimolata, generano cioè ulteriori fotoni temporalmente e spazialmente coerenti con quelli del segnale stesso, il quale risulta quindi amplificato.

Fra le terre rare utilizzabili come drogante, lo ione erbio  $Er^{3+}$  è molto importante. Esso presenta i picchi dello spettro di assorbimento a  $980\text{ nm}$  e  $1480\text{ nm}$  (lunghezze d'onda con cui è possibile pompare il sistema) ed il picco dello spettro di fluorescenza in corrispondenza del minimo dell'attenuazione delle guide d'onda e delle fibre ottiche realizzate in silice.

## 1.2 Il sistema a tre livelli

La silice drogata con basse concentrazioni di erbio è ben rappresentata da un sistema a 3 livelli energetici. Si indicano rispettivamente con  $N_1$ ,  $N_2$  ed  $N_3$ , le densità di popolazione (espresse in  $[ioni/m^3]$ ) dei livelli energetici fondamentale ( ${}^4I_{15/2}$ ), metastabile ( ${}^4I_{13/2}$ ) e di pompa ( ${}^4I_{11/2}$ ), dello ione erbio. In figura 1.1 sono rappresentati i livelli energetici dello ione erbio, con indicate le frequenze di transizione degli elettroni, causate dai meccanismi preceden-

temente discussi. In particolare  $R$  è la frequenza con cui avviene il fenomeno di assorbimento di un fotone alla lunghezza d'onda della pompa,  $W_{12}$  è la frequenza con cui è assorbito un fotone alla lunghezza d'onda del segnale,  $W_{21}$  è la frequenza associata al fenomeno di emissione stimolata di un fotone alla lunghezza d'onda del segnale, mentre  $A_{21}$  e  $A_{32}$  sono le frequenze con cui un elettrone decade rispettivamente dal livello  ${}^4I_{13/2}$  a  ${}^4I_{15/2}$  e dal livello  ${}^4I_{11/2}$  a  ${}^4I_{13/2}$ , quest'ultima è indicata con una linea tratteggiata, trattandosi di un'emissione non radiativa. Si sono trascurate le frequenze associate ai fenomeni di emissione stimolata e spontanea alla lunghezza d'onda della pompa, essendo poco probabili.



**Figura 1.1:** Rappresentazione schematica del sistema a 3 livelli dello ione  $Er^{3+}$ , con indicate le frequenze di transizione stimolata ( $W_{12}$ ,  $W_{21}$  ed  $R$ ) e spontanea ( $A_{21}$  ed  $A_{32}$ ).

I fotoni iniettati nella fibra tramite il *laser* di pompa, vengono assorbiti dal materiale attivo, portando gli elettroni dell'erbio dal livello fondamentale

${}^4I_{15/2}$ , al livello  ${}^4I_{11/2}$ . Siccome il tempo di vita medio di questo livello energetico è molto breve ( $\tau_{32} \simeq 1.0 \text{ nsec}$ ), gli elettroni decadono spontaneamente in modo non radiativo al livello metastabile  ${}^4I_{13/2}$ , il cui tempo di vita medio è molto elevato, rispetto il precedente ( $\tau_{32} \simeq 10 \text{ msec}$ ). Se la radiazione di pompa è sufficientemente intensa, è possibile portare il sistema all'inversione di popolazione:  $N_2 > N_1$ . Il segnale di ingresso, la cui lunghezza d'onda corrisponde al salto energetico tra il livello metastabile e il livello fondamentale, può quindi essere amplificato, attraverso il fenomeno di emissione stimolata. Occorre però osservare che, essendo la probabilità di emissione spontanea non nulla, possono essere emessi fotoni alla stessa lunghezza d'onda del segnale, ma temporalmente e spazialmente incoerenti rispetto quest'ultimo. Tali fotoni si trovano nelle stesse condizioni dei fotoni costituenti il segnale, perciò vengono amplificati col medesimo meccanismo fisico. Questo fenomeno è all'origine di uno spettro di rumore largo quanto la banda dell'amplificatore e di ampiezza dipendente dalle frequenze di transizione. Si parla di emissione spontanea amplificata copropagante e contropropagante, rispetto la direzione di propagazione ( $ASE\pm$ ) [Des94].

I fenomeni di assorbimento, emissione stimolata ed emissione spontanea, sono indipendenti tra loro, cioè un atomo non può subire due processi contemporaneamente. Grazie a questa proprietà le frequenze di transizione si possono sommare: si possono quindi scrivere delle equazioni di bilancio, le cosiddette *population rate equations*:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial t} = -W_{12}N_1 - RN_1 + A_{21}N_2 + W_{21}N_2 \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} = W_{12}N_1 - A_{21}N_2 - W_{21}N_2 + A_{32}N_3 \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} = RN_1 - A_{32}N_3 \end{cases} \quad (1.1)$$



che rappresentano le variazioni delle densità di popolazione nell'unità di tempo. A regime stazionario tutte le derivate rispetto al tempo si annullano, inoltre si introduce la legge di conservazione, per cui la somma di tutte le densità di popolazione presenti nel sistema deve essere pari al numero totale di ioni d'erbio presenti nel sistema, indicata con  $N_T$ :

$$N_1 + N_2 + N_3 = N_T \quad (1.2)$$

Si osserva sperimentalmente che, essendo  $\tau_{32}$  estremamente piccolo, il livello energetico  ${}^4I_{11/2}$  è quasi completamente spopolato, per cui si assume  $N_3 = 0$ . Con semplici passaggi matematici si determinano le altre due densità di popolazione:

$$N_1 = \frac{W_{21} + A_{21}}{R + W_{12} + W_{21} + A_{21}} \quad (1.3)$$

$$N_2 = \frac{W_{12} + R}{R + W_{12} + W_{21} + A_{21}} \quad (1.4)$$

Il sistema a 3 livelli si può effettivamente considerare come un sistema a 2 livelli, con la differenza del termine  $R$  relativo alla pompa.

Di seguito sono riportate le espressioni delle frequenze di transizione che compaiono nelle (1.3) e (1.4), tali espressioni sono ricavate in [DiP93]. Si suppone che nel sistema siano presenti  $N_s$  segnali, centrati alle frequenze  $\nu_j$  e di intensità  $I_s(\nu_j)$  e la pompa, con intensità  $I_p$ , alla frequenza  $\nu_p$ . Si indicano con  $i_{ASE+}(\nu)$  e  $i_{ASE-}(\nu)$  le densità spettrali di intensità, copropagante e contropropagante, associate all'*ASE*. La frequenza di transizione  $W_{12}$

associata all'assorbimento è espressa dalla:

$$\begin{aligned}
 W_{12}(x, y, z) &= \sum_{j=1}^{N_s} \frac{\sigma_{12}(\nu_j)}{h\nu_j} I_s(x, y, z, \nu_j) + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{\sigma_{12}(\nu)}{h\nu} [i_{ASE+}(x, y, z, \nu) + i_{ASE-}(x, y, z, \nu)] d\nu
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

analogamente, la frequenza di transizione  $W_{21}$ , associata all'emissione stimolata, si scrive:

$$\begin{aligned}
 W_{21}(x, y, z) &= \sum_{j=1}^{N_s} \frac{\sigma_{21}(\nu_j)}{h\nu_j} I_s(x, y, z, \nu_j) + \\
 &+ \int_0^\infty \frac{\sigma_{21}(\nu)}{h\nu} [i_{ASE+}(x, y, z, \nu) + i_{ASE-}(x, y, z, \nu)] d\nu
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

relativamente alle transizioni dovute alla pompa, si scrive:

$$R(x, y, z) = \frac{\sigma_{13}(\nu_p)}{h\nu_p} [I_{p+}(x, y, z, \nu_p) + I_{p-}(x, y, z, \nu_p)] \tag{1.7}$$

dove  $h$  è la costante di *Plank*;  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$  sono le *cross sections* di emissione ed assorbimento (in analogia con la meccanica degli urti tra particelle, il fotone incidente vede lo ione d'erbio con una sezione pari a  $\sigma$ , più è elevata quest'ultima, maggiore è la probabilità di urto). È da notare che i termini legati all'assorbimento e all'emissione stimolate dipendono dall'intensità del campo elettromagnetico incidente, inoltre le frequenze di transizione stimolate  $W_{12}$  e  $W_{21}$  in generale possiedono contributi derivanti dall'intero spettro.

Le frequenze di emissione spontanee, invece, non dipendono dall'intensità del campo elettromagnetico incidente, in particolare sono espresse come l'inverso del tempo di vita medio di un elettrone che si trova ad un determinato

livello energetico eccitato:

$$A_{21} = \frac{1}{\tau_{21}} \quad (1.8)$$

$$A_{32} = \frac{1}{\tau_{32}} \quad (1.9)$$

### 1.3 Le *propagation rate equations*

Si è detto che l'energia è stata quantizzata, cioè gli ioni del materiale attivo possono assumere solo un numero discreto di stati energetici. Facendo l'ipotesi che le radiazioni di pompa e di segnale siano costituite da un numero elevato di fotoni, il campo elettromagnetico si può assumere continuo (teoria semiclassica). Si considera un'onda elettromagnetica che si propaga lungo la coordinata  $z$  in un mezzo privo di perdite e in assenza di sorgenti, in regime stazionario (potenza costante al variare del tempo  $t$ ); applicando il teorema di *Poynting* nella sola dimensione  $z$ , si ottiene la seguente equazione di continuità:

$$\frac{\partial I(x, y, z, t)}{\partial z} = 0 \quad (1.10)$$

dove  $I$  è l'intensità del campo elettromagnetico. Nel caso in cui l'onda non si propaga in un mezzo ideale, la quantità nulla al secondo membro della (1.10), deve essere sostituita dalla variazione di intensità dovuta ai fenomeni di assorbimento ed emissione dei fotoni. Tale variazione è quindi proporzionale al numero di ioni di drogante presenti nel mezzo e al numero di fotoni che costituiscono il campo incidente, cioè all'intensità dell'onda incidente. Il coefficiente di proporzionalità è la *cross section*  $\sigma_{ij}$ , già introdotta nella sezione

precedente, dove i pedici  $i$  e  $j$  indicano i livelli energetici coinvolti nella transizione (se  $i > j$  si tratta di un fenomeno di emissione, mentre se  $i < j$  si tratta di un fenomeno di assorbimento).

Facendo riferimento al sistema a 3 livelli, riportato nella sezione precedente, per l'intensità dei campi di segnale si ottiene:

$$\frac{\partial I_s(x, y, z)}{\partial z} = [-\sigma_{12}N_1 + \sigma_{21}N_2]I_s(x, y, z) \quad (1.11)$$

mentre per l'intensità del campo di pompa:

$$\frac{\partial I_p(x, y, z)}{\partial z} = -\sigma_{13}N_1I_p(x, y, z) \quad (1.12)$$

È importante osservare che nelle equazioni precedenti non si è tenuto conto dell'emissione spontanea. Il contributo di questo processo aleatorio dipende sia dall'istante di emissione, sia dal punto in cui l'emissione stessa ha luogo. Il suo effetto riguarda pertanto sia lo stato di coerenza temporale che spaziale della radiazione. Il risultato complessivo può essere descritto solo attraverso una quantizzazione del campo elettromagnetico.

Per ricavare delle espressioni in potenza, si suppone che i profili di intensità siano a variabili separabili:

$$I(x, y, z) = I'(z)f(x, y) \quad (1.13)$$

Ciò equivale a ritenere la forma dei profili di campo elettromagnetico invarianti rispetto la coordinata di propagazione  $z$ . Si definisce il profilo di

intensità normalizzato:

$$\psi(x, y) = \frac{f(x, y)}{\iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy} \quad (1.14)$$

tale per cui:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \psi(x, y) dx dy = 1 \quad (1.15)$$

Utilizzando tale profilo normalizzato, si passa all'integrazione sul piano trasverso della struttura guidante e ricordando che la potenza è definita nel seguente modo:

$$P(z) = \iint_{-\infty}^{\infty} I(x, y, z) dx dy \quad (1.16)$$

le equazioni (1.11) e (1.12) assumono la forma:

$$\frac{\partial P_s(z)}{\partial z} = -P_s(z) \int_A [\sigma_{12} N_1 - \sigma_{21} N_2] \psi_s(x, y) dx dy \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial P_p(z)}{\partial z} = -P_p(z) \int_A \sigma_{13} N_1 \psi_s(x, y) dx dy \quad (1.18)$$

dove  $A$  è la sezione della zona attiva della guida d'onda o della fibra. Queste equazioni integro-differenziali esprimono le variazioni delle potenze di segnale e di pompa lungo la coordinata di propagazione  $z$ , sono le cosiddette *propagation rate equations*.

## 1.4 Le *cross sections*

La determinazione sperimentale delle *cross sections* è di fondamentale importanza per la modellizzazione degli amplificatori su guida d'onda o su fibra ottica drogata con erbio ed è proprio in essa che si incontrano le difficoltà maggiori. Infatti non è possibile misurare direttamente le *cross sections*, esse vengono determinate indirettamente dalla conoscenza di altre grandezze, purtroppo con una inaccuratezza che non può essere eliminata con nessun accorgimento. La validità di un buon modello teorico richiede non solo una buona previsione dei dati sperimentali, ma richiede anche parametri di ingresso determinabili in modo ragionevolmente semplice ed accurato. La determinazione delle *cross sections* rappresenta il limite maggiore per la modellizzazione degli amplificatori ottici, in quanto, a fronte della possibilità di avere un modello molto preciso, si è costretti ad utilizzare dati di ingresso approssimati. Il problema della determinazione sperimentale delle *cross sections* può essere eliminato facendo ricorso ad un modello semplificato, che utilizza, come parametri di ingresso, unicamente grandezze direttamente misurabili. Si parla di un modello teorico peggiore, con dati di ingresso più accurati. Una breve discussione sui due diversi modelli sarà affrontata nel prossimo capitolo.

Sostanzialmente esistono due metodi per determinare le *cross sections*: uno basato sulle cosiddette equazioni di *Ladenburg-Fuchtbauer* [Des94], [Bja93] e uno basato sulla teoria di *McCumber* [Des94], [Min91]. Il primo presuppone la conoscenza degli spettri di assorbimento e di fluorescenza, utilizzando le equazioni di *Ladenburg-Fuchtbauer*:

$$\sigma_{as}(\lambda) = \frac{(\lambda_{as}^{peak})^2}{8\pi n^2 c \tau_{21}} \frac{I_{as}^{peak}(\lambda)}{\int_0^\infty I_{as}(\lambda) d\lambda} \quad (1.19)$$

$$\sigma_{em}(\lambda) = \frac{(\lambda_{em}^{peek})^2}{8\pi n^2 c \tau_{21}} \frac{I_{em}^{peek}(\lambda)}{\int_0^\infty I_{em}(\lambda) d\lambda} \quad (1.20)$$

dove  $\lambda_{as/em}^{peek}$  sono le lunghezze d'onda di picco degli spettri di emissione ed assorbimento  $I_{as/em}(\lambda)$ ,  $I_{as/em}^{peek}(\lambda)$  i rispettivi valori di picco,  $c$  è la velocità della luce nel vuoto ed  $n$  è l'indice di rifrazione. La seconda tecnica, invece, si basa sulla misura diretta dei coefficienti spettrali di assorbimento  $\alpha(\lambda)$  e di guadagno  $g(\lambda)$  per unità di lunghezza. Da questi si ricavano le *cross sections* di assorbimento  $\sigma_{as}(\lambda)$ , tramite la seguente espressione:

$$\sigma_{as}(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\iint_{-\infty}^{\infty} N_T(x, y, z) \psi(x, y) dx dy} \quad (1.21)$$

dove l'integrale a denominatore è l'integrale di sovrapposizione tra la distribuzione del drogante e l'intensità del modo ottico (il cosiddetto integrale di *overlap*). Attraverso la teoria di *McCumber* si ricavano le *cross sections* di emissione, espresse da:

$$\sigma_{em}(\lambda) = \sigma_{as}(\lambda) \exp \left\{ \frac{h(\nu - \varepsilon)}{k_B T} \right\} \quad (1.22)$$

dove  $h$  è la costante di *Plank*,  $k_B$  è la costante di *Boltzmann*,  $T$  è la temperatura assoluta ed  $h\varepsilon$  è l'energia libera richiesta per muovere uno ione di drogante dallo stato energetico fondamentale, ad uno stato eccitato, mantenendo costante la temperatura del reticolo. Quest'ultima quantità si può ricavare essere uguale a:

$$h\varepsilon = -k_B T \log \left( \frac{N_2}{N_1} \right) \quad (1.23)$$

dove  $N_2/N_1$  è il rapporto tra le densità di popolazione all'equilibrio termico, quando il mezzo non è pompato.

Le misure si possono realizzare direttamente sulla guida d'onda o sulla fibra. Per misurare lo spettro di assorbimento sono necessari una sorgente di "luce bianca", cioè una sorgente con spettro piatto su tutta la banda da misurare e un analizzatore di spettri ottici; la misura si realizza sul sistema non pompato. Lo spettro di fluorescenza si misura nello stesso modo, ma con il sistema nella condizione di completa inversione di popolazione, quindi col sistema pompato. Le misure sull'attenuazione devono essere realizzate su un tratto non troppo breve di fibra per evitare di misurare anche l'intensità dei modi evanescenti, che si estinguono dopo un breve tratto di fibra. Al contrario la misura dello spettro di fluorescenza deve essere effettuato su un tratto corto di fibra, per evitare che l'emissione spontanea venga riassorbita. Per ricavare il coefficiente spettrale di assorbimento  $\alpha(\lambda)$  si può utilizzare una sorgente accordabile e realizzare due misure: una alla lunghezza d'onda della pompa (980 nm) e l'altra nella banda di amplificazione, 1500 – 1600 nm. Si applica la tecnica del *cut-back*, che consiste nell'effettuare due misure di potenza, prima e dopo il taglio di un tratto di lunghezza  $L$  della fibra, il valore di  $\alpha(\lambda)$  è dato da:

$$\alpha(\lambda) = -\frac{10}{L} \log \left( \frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)} \right) \quad (1.24)$$

Il coefficiente di guadagno  $g(\lambda)$  è ricavato dallo spettro di fluorescenza, tramite l'espressione:

$$g(\lambda) = \left( \frac{\Delta G(\lambda_s)}{L} - \alpha(\lambda_s) \right) \frac{I(\lambda)}{I(\lambda_s)} \quad (1.25)$$

dove  $I(\lambda)$  rappresenta lo spettro di fluorescenza,  $I(\lambda_s)$  il suo valore di picco,



$\alpha(\lambda_s)$  è l'assorbimento al picco e  $\Delta G(\lambda_s)$  è la differenza fra guadagno e perdite misurati al picco, per un tratto di fibra di lunghezza  $L$ , nelle due condizioni opposte di pompaggio ad alta potenza ed assenza di pompaggio.

# Capitolo 2

## Il modello spaziale per l'amplificatore

Negli ultimi dieci anni, gli amplificatori ottici drogati con terre rare sono diventati i dispositivi più efficienti per rigenerare segnali ottici in sistemi multicanale. Questo ha motivato una dinamica attività di ricerca orientata alla modellizzazione di tali dispositivi.

Facendo riferimento al sistema a 3 livelli descritto nel paragrafo 1.2, l'obiettivo consiste nel poter prevedere il comportamento degli amplificatori ottici relizzati su guide dielettriche o fibre drogate con terre rare. A tal scopo si ricorre a modelli teorici basati sulle equazioni di bilancio (*population rate equations* e *propagation rate equations*) introdotte nel capitolo 1. Esistono principalmente due modelli teorici: il modello *spaziale* e il modello spettrale. Il primo è più accurato, ma richiede la determinazione sperimentale delle *cross sections* di assorbimento ed emissione, che, come si è visto nella sezione 1.4, è piuttosto difficoltosa. In alternativa il modello *spettrale* è un modello semplificato, che, attraverso la definizione di popolazioni medie sul piano

trasverso, ottiene risultati validi, richiedendo in ingresso parametri direttamente misurabili, quindi determinabili con maggiore accuratezza. Questo modello permette di descrivere bene le caratteristiche spettrali dell'amplificatore, ma non quelle spaziali. In particolare permette di scrivere le *population rate equations* (1.1) e le *propagation rate equations* (1.17) e (1.18) attraverso i coefficienti spettrali di assorbimento  $\alpha(\lambda)$  (1.24) e di guadagno  $g(\lambda)$  (1.25) ed un parametro di saturazione  $\xi$ , anch'esso determinabile sperimentalmente, definito da:

$$\xi = \frac{A_{eff}\overline{N_T}}{\tau_{21}} \quad (2.1)$$

dove  $A_{eff}$  è un'area efficace della superficie drogata ed  $\overline{N_T}$  è la concentrazione media, sul piano trasverso, del drogante.

Per quanto riguarda il modello spaziale, si definiscono i seguenti coefficienti di assorbimento e di guadagno, per le lunghezze d'onda dei segnale e della pompa:

$$\gamma_{12}(z, \nu_j) = \int_A \psi_s(x, y) \sigma_{12}(\nu_j) N_1(x, y, z) dx dy \quad (2.2)$$

$$\gamma_{21}(z, \nu_j) = \int_A \psi_s(x, y) \sigma_{21}(\nu_j) N_2(x, y, z) dx dy \quad (2.3)$$

$$\gamma_p(z) = \int_A \psi_p(x, y) \sigma_{13} N_1(x, y, z) dx dy \quad (2.4)$$

Le *propagation rate equations* assumono la seguente forma:

$$\frac{\partial P_s(z, \nu_j)}{\partial z} = [\gamma_{21}(z, \nu_j) - \gamma_{12}(z, \nu_j)] P_s(z, \nu_j) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial P_{p\pm}(z)}{\partial z} = \mp \gamma_p(z) P_{p\pm}(z) \quad (2.6)$$

dove  $j = 1, 2, \dots, N_s$ , con  $N_s$  numero di segnali, pone in evidenza l'eventuale presenza contemporanea di più canali: per ogni segnale a frequenza  $\nu_j$ , si scrive una diversa equazione di propagazione nella forma della (2.5); i segni  $\pm$  indicano i due schemi di pompaggio, copropagante e contropropagante, rispetto la direzione di propagazione del segnale. Per poter esprimere il rumore dovuto all'emissione spontanea è necessario discretizzare lo spettro di fluorescenza in  $M$  intervalli di frequenza, di larghezza  $\Delta\nu_i$ . È possibile dimostrare, [DiP93], che la potenza del rumore *ASE* si esprime con ulteriori equazioni di bilancio:

$$\frac{\partial P_{ASE\pm}(z, \nu_i)}{\partial z} = \pm [\gamma_{21}(z, \nu_i) - \gamma_{12}(z, \nu_i)] P_{ASE\pm}(z, \nu_i) \pm mh\nu_i \Delta\nu_i \gamma_{21}(z, \nu_i) \quad (2.7)$$

dove il termine  $mh\nu_i$  è stato introdotto per tenere conto degli  $m$  modi guidati, a diversa polarizzazione, che possono propagarsi alla frequenza  $\nu_i$ . Alle *propagation rate equations* (2.5), (2.6), (2.7) occorre associare le seguenti condizioni al contorno:

$$P_s(0, \nu_j) = P_{s0}(\nu_j) \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, N_s \quad (2.8)$$

$$P_{p+}(0) = P_{p0} \quad (2.9)$$

$$P_{p-}(L) = P_{pL} \quad (2.10)$$

$$P_{ASE+}(0, \nu_i) = P_{ASE-}(L, \nu_i) = 0 \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, M \quad (2.11)$$

dove  $L$  è la lunghezza dell'amplificatore. Le condizioni al contorno per i segnali e per la pompa sono determinate dalle condizioni di funziona-

mento dell'amplificatore, quindi dalla potenza dei segnali all'ingresso del dispositivo e dalla potenza dei *lasers* di pompa utilizzati, copropagante e contropropagante.

Tramite le *population rate equations* si calcolano puntualmente le densità di popolazione  $N_1$ ,  $N_2$  ed  $N_3$  su ogni sezione trasversa della guida d'onda o della fibra. Le frequenze di transizione stimulate  $W_{12}$ ,  $W_{21}$  ed  $R$ , rispettivamente espresse dalle (1.5), (1.6) e (1.7), vengono calcolate localmente su ogni sezione. Poichè lo spettro di fluorescenza viene discretizzato in un numero finito di intervalli, è necessario sostituire gli integrali in frequenza che compaiono nelle (1.5) e (1.6), in sommatorie:

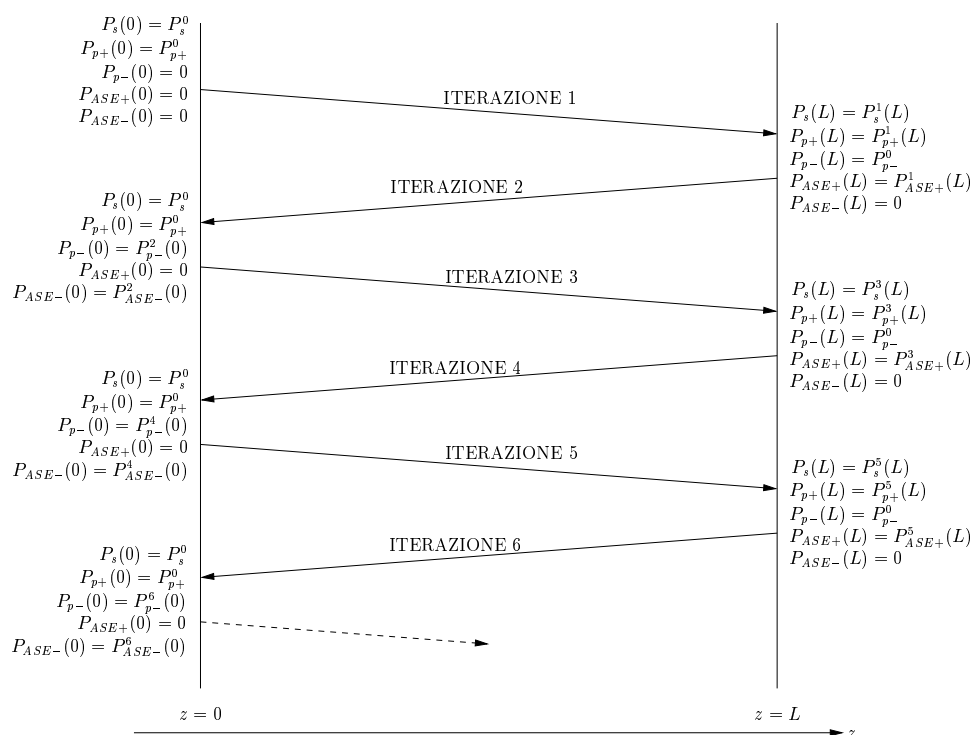
$$W_{12}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N_s} \frac{\sigma_{12}(\nu_j)}{h\nu_j} I_s(x, y, z, \nu_j) + \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{12}(\nu_i)}{h\nu_i} [I_{ASE+}(x, y, z, \nu_i) + I_{ASE-}(x, y, z, \nu_i)] \quad (2.12)$$

$$W_{21}(x, y, z) = \sum_{j=1}^{N_s} \frac{\sigma_{21}(\nu_j)}{h\nu_j} I_s(x, y, z, \nu_j) + \sum_{i=1}^M \frac{\sigma_{21}(\nu_i)}{h\nu_i} [I_{ASE+}(x, y, z, \nu_i) + I_{ASE-}(x, y, z, \nu_i)] \quad (2.13)$$

Alla luce di quello che è stato detto, si può affermare che le *propagation rate equations* costituiscono un sistema di  $2M + N_s + 2$  equazioni integro-differenziali non lineari, accoppiate fra loro per la presenza delle densità di popolazione, con assegnate le condizioni al contorno. È importante notare che lo stesso profilo di intensità normalizzata  $\psi_s(x, y)$  è stato utilizzato per tutti i segnali a diverse lunghezze d'onda e anche per il rumore *ASE*. questa ipotesi è giustificata dal fatto che le lunghezze d'onda in questione sono molto

prossime fra loro.

Il sistema è risolvibile solo con metodi di risoluzione numerica. Ci sono due distinti problemi: la valutazione delle condizioni al contorno e l'integrazione su tutta la lunghezza dell'amplificatore. Per quanto riguarda il primo punto si utilizza il cosiddetto *relaxation method*. Questo è un metodo iterativo che realizza delle integrazioni successive verso le  $z$  crescenti e verso le  $z$  decrescenti fino ad arrivare alla convergenza. Ad ogni iterazione, le



**Figura 2.1:** Rappresentazione grafica delle iterazioni del *relaxation method* per la valutazione delle condizioni al contorno delle *propagation rate equations*.

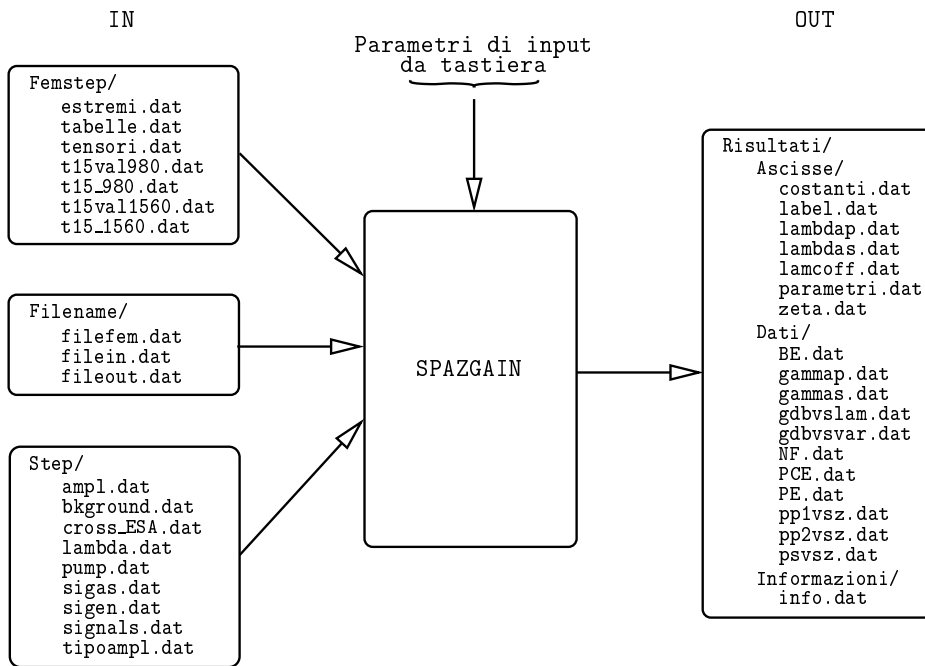
condizioni al contorno sono ricalcolate e utilizzate nell'iterazione successiva, fino alla convergenza della potenza dell'ASE copropagante. Nella prima iter-

azione la potenza della pompa contropropagante  $P_{p-}$  ed entrambe le potenze dell'*ASE* sono sconosciute, quindi sono assunte nulle. Il *relaxation method* è rappresentato graficamente in figura 2.1. Per quanto riguarda l'integrazione delle equazioni differenziali lungo  $z$ , la lunghezza  $L$  della guida d'onda o della fibra è divisa in  $K$  intervalli di ampiezza  $\Delta z$ , tale per cui sia lecito supporre costanti i coefficienti  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$  e  $\gamma_p$ , calcolati all'interno di ogni intervallo. Le equazioni (2.5), (2.6) e (2.7) vengono integrate sul generico intervallo  $\Delta z_i$  con il metodo di *Runge-Kutta*, i valori di potenza ottenuti sono utilizzati per calcolare i coefficienti  $\gamma_{21}$ ,  $\gamma_{12}$  e  $\gamma_p$ , quindi per reimpostare e risolvere gli integrali nell'intervallo successivo  $\Delta z_{i+1}$ . L'iterazione continua per tutta la lunghezza  $L$  dell'amplificatore.

## 2.1 Il simulatore basato sul modello spaziale: SPAZGAIN

Il simulatore per l'amplificatore ottico, basato sul modello spaziale, disponibile in questa Università è chiamato **SPAZGAIN**. Esso, oltre ai parametri dell'amplificatore, necessita della conoscenza dei campi elettromagnetici dei modi alle lunghezze d'onda del segnale e della pompa, calcolati tramite il metodo degli elementi finiti, sulla struttura in analisi imperturbata, cioè in assenza di drogante.

La sua sezione di *input/output*, mostrata in figura 2.2 è organizzata in quattro diversi direttori, tre in ingresso e uno in uscita. All'interno di ogni direttorio ci sono i files di *input* e di *output* che, rispettivamente, **SPAZGAIN** legge e scrive. A seguire sono descritti i files principali.



**Figura 2.2:** Schema descrittivo dei files di input e output del simulatore per l'amplificatore ottico SPAZGAIN.

### *Files di ingresso*

Il direttorio `Femstep/` contiene le informazioni sul campo elettromagnetico di ingresso, relativa alla soluzione basata sul metodo degli elementi finiti:

`estremi.dat`: contiene gli estremi del dominio  $\Omega$  su cui è studiata la struttura.

`tabelle.dat`: contiene le informazioni geometriche sugli elementi triangolari e sui nodi della *mesh*.

`tensori.dat`: contiene le informazioni sulle caratteristiche fisiche della struttura, cioè il tensore di permittività assoluta  $\bar{\bar{\epsilon}}$ , per ogni elemento triangolare.



Il direttorio `Step/` contiene i parametri relativi all'amplificatore, alla pompa e ai segnali di ingresso:

`ampl.dat`: contiene la lunghezza dell'amplificatore, i tempi di vita medi  $\tau$ , la concentrazione del drogante e il raggio della superficie drogata.

`bkground.dat`: contiene i valori delle perdite della fibra non drogata.

`cross_ESA.dat`: contiene la *cross sections* relativa al fenomeno di assorbimento della pompa da parte di elettroni che si trovano in livelli energetici eccitati (*ESA*).

`lambda.dat`: contiene i valori delle lunghezze d'onda con cui è stato suddiviso l'intero spettro in analisi.

`pump.dat`: contiene la lunghezza d'onda della pompa, la sua potenza iniziale e le sue *cross sections* di assorbimento ed emissione.

`sigas.dat`: contiene i valori delle *cross sections* di assorbimento riferiti alle lunghezze d'onda scritte in `lambda.dat`.

`sigem.dat`: contiene i valori delle *cross sections* di emissione riferiti alle lunghezze d'onda scritte in `lambda.dat`.

`signals.dat`: contiene il numero di segnali in ingresso e le corrispondenti lunghezze d'onda e potenze iniziali.

`tipoampl.dat`: contiene le informazioni sul tipo di amplificatore in esame.

Il direttorio `Filename/` contiene i nomi dei files coinvolti da SPAZGAIN:

`filefem.dat`: nomi dei files contenuti nel direttorio `Femstep/`

`filein.dat`: nomi dei files contenuti nel direttorio `Step/`

fileout.dat: nomi dei files contenuti nel direttorio Risultati/

### ***Parametri di input da tastiera***

*Relativi all'iterazione delle simulazioni:* SPAZGAIN consente l'iterazione delle simulazioni sulla variazione di un parametro, che può essere: la lunghezza dell'amplificatore, la potenza dei segnali di ingresso o la potenza della pompa. È necessario indicare quale parametro viene variato, il numero di iterazioni e i valori di tale parametro in ogni iterazione.

*Relativi alla simulazione:* numero di intervalli  $\Delta z$  con cui viene divisa la lunghezza dell'amplificatore; profilo di concentrazione del drogante; tipo di approssimazione sugli integrali di sovrapposizione tra drogante e intensità normalizzata e presenza o assenza di *ESA*.

### ***Files di uscita***

Nel direttorio risultati/ sono contenuti i seguenti tre direttori:

**Dati/:** contiene i files con i risultati delle simulazioni realizzate, i principali sono:

**gammap.dat:** contiene i valori dei coefficienti  $\gamma_p$  per la pompa.

**gammas.dat:** contiene i valori dei coefficienti  $\gamma_s$  per il segnale.

**gdbvslam.dat:** contiene i valori dei guadagni  $G_{dB}$  per ogni segnale in ingresso.

**gdbvsvar.dat:** contiene i valori dei guadagni  $G_{dB}$  al variare del parametro di simulazione.

`pp1vsz.dat`: contiene l'andamento della potenza della pompa copropagante in funzione della coordinata  $z$ . L'andamento della potenza dell'eventuale pompa contropropagante è contenuta nel file `pp2vsz.dat`.

`psvsz.dat`: contiene l'andamento della potenza del segnale alla lunghezza d'onda  $\lambda = 1550 \text{ nm}$  in funzione della coordinata  $z$ .

`Informazioni/` e `Ascisse/`: contengono le informazioni sui dati di ingresso e sulle modalità delle simulazioni realizzate.

Il segnale di riferimento, per i valori contenuti in `psvsz.dat`, della potenza  $P_s(z)$  del segnale in funzione di  $z$ , ha lunghezza d'onda  $\lambda = 1550 \text{ nm}$ . Tale parametro è contenuto nel codice di **SPAZGAIN** e non può quindi essere scelto dall'utilizzatore.

La figura 2.3 mostra le procedure che attua **SPAZGAIN**. Esso legge da files i valori del campo elettromagnetico del segnale e della pompa, le relative potenze ed i valori delle *cross sections* di assorbimento e di emissione. In particolare i valori dei campi sono forniti su di un numero finito di punti  $NN$ , vertici di triangoli con cui è stata suddivisa la sezione trasversa della struttura da studiare (il cosiddetto metodo degli elementi finiti, che verrà descritto nei prossimi capitoli), il numero di triangoli utilizzati è indicato con  $NT$ . Attraverso questi valori vengono calcolati i profili delle intensità normalizzate del segnale e della pompa, i quali vengono considerati costanti al variare della coordinata  $z$ .

A questo punto **SPAZGAIN** suddivide la lunghezza  $L$  dell'amplificatore in  $K$  intervalli di ampiezza  $\Delta z$ : su ogni triangolo appartenente alla prima sezione della struttura, imposta e risolve le *population rate equations* (1.1), (1.3) e (1.4), dalla conoscenza delle densità di popolazione, attraverso le (2.2),

(2.3) e (2.4), calcola i coefficienti  $\gamma(z, \nu)$  di assorbimento e di guadagno per i segnali e la pompa e da questi ricava le *propagation rate equations* (2.5), (2.6) e (2.7) per i segnali, la pompa e il rumore ASE. Esse vengono risolte, come è stato detto precedentemente, attraverso il metodo di *Runge-Kutta*,

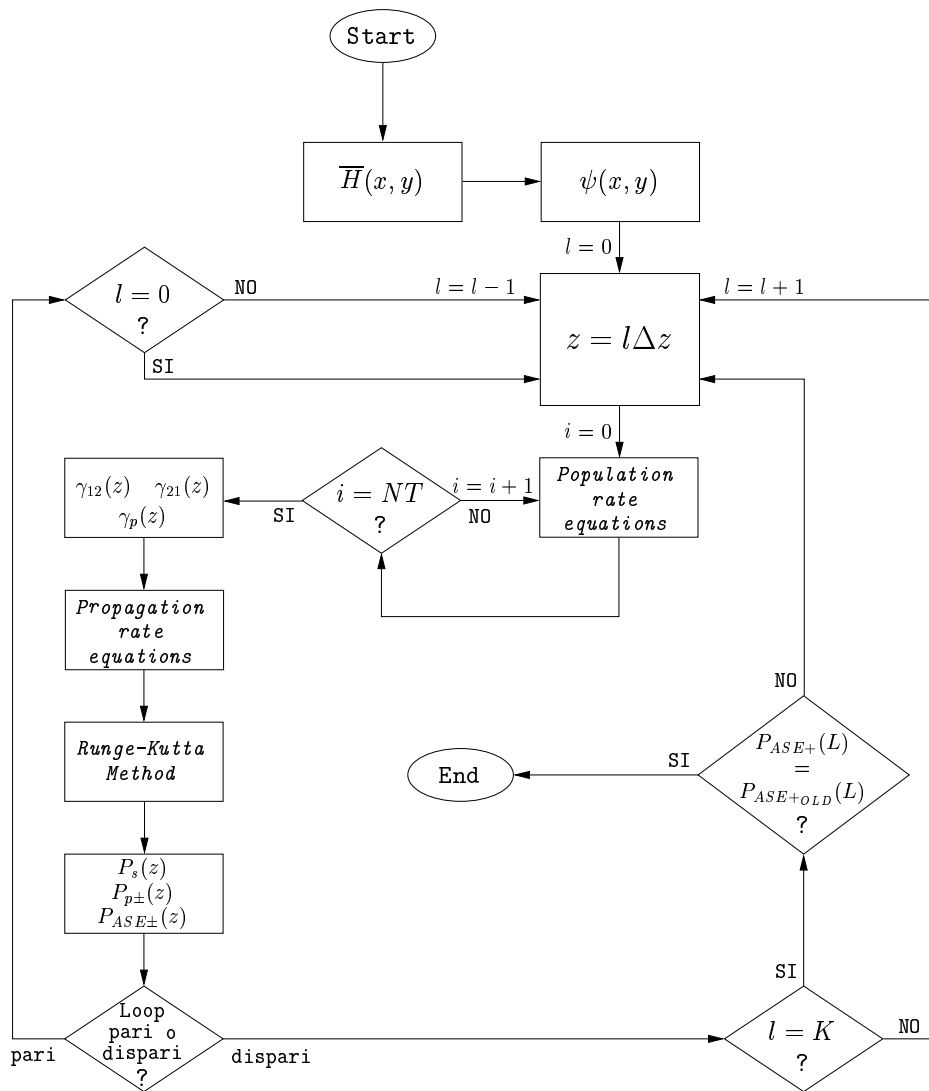
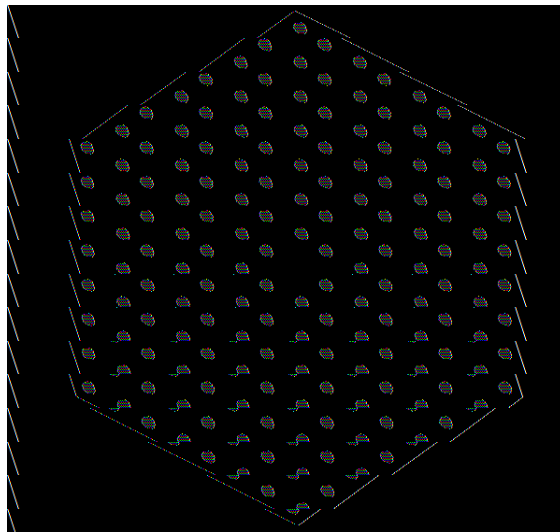


Figura 2.3: Diagramma di flusso rappresentante i cicli realizzati da SPAZGAIN.

da  $z = 0$  a  $z = \Delta z$ . I valori di potenza calcolati sono utilizzati per ripetere il procedimento sulla seconda sezione, ora le *propagation rate equations* sono risolte per il secondo intervallo, da  $z = \Delta z$  a  $z = 2\Delta z$ . Il procedimento è ripetuto finchè è raggiunta la  $K$ -esima sezione, dove ricomincia a ricavare ed a risolvere le *propagation rate equations* nello stesso modo, ma procedendo nel verso negativo rispetto la direzione della coordinata  $z$ . SPAZGAIN continua ad integrare avanti e indietro sulla lunghezza dell'amplificatore fintanto che ricava due valori della potenza dell'*ASE* uguali, a meno di una piccola tolleranza. Raggiunta la convergenza per la potenza del rumore, SPAZGAIN ritiene valida la sua ultima stima sui valori della potenza dei segnali.

## 2.2 Applicazione alle fibre a cristalli fotonici

Il reticolo della fibra a cristalli fotonici studiata ha una struttura triangolare mostrata in figura 2.4. Nelle *PCF* il guidaggio della luce è ottenuto inserendo



**Figura 2.4:** Geometria della fibra a cristalli fotonici triangolare a 7 anelli.

un difetto che interrompe la periodicità del reticolo, in questo caso il difetto è costituito dalla mancanza del foro centrale [Fer02]. A causa dei fori d'aria, l'indice di rifrazione del nucleo è maggiore dell'indice di rifrazione medio del cladding, quindi il guidaggio avviene tramite riflessione totale, analogamente a quanto avviene nelle fibre step.

$\Lambda$  indica la distanza tra due fori e  $d$  il diametro dei fori. Le simulazioni sono state realizzate innanzitutto per determinati valori del rapporto  $d/\Lambda$ . Con  $\Lambda = 2.3 \mu m$ , è stato fissato il rapporto  $d/\Lambda$  ai valori di 0.35, 0.5, 0.6 e 0.8, in modo da studiare fibre la cui attenuazione sia stato dimostrato essere intorno a  $0.1 \text{ dB/m}$  alla lunghezza d'onda del segnale. Per ottenere questi livelli di attenuazione è necessario considerare geometrie con un ben determinato numero di anelli, come riassunto nella tabella 2.1.

	[ $\mu m$ ]				
	$\Lambda = 2.3$	$\Lambda = 2.875$	$\Lambda = 3.45$	$\Lambda = 4.025$	$\Lambda = 4.6$
$d/\Lambda = 0.35$ (7 anelli)	$d = 0.805$	$d = 1.00625$	$d = 1.2075$	$d = 1.40875$	$d = 1.61$
$d/\Lambda = 0.5$ (5 anelli)	$d = 1.15$	$d = 1.4375$	$d = 1.725$	$d = 2.0125$	$d = 2.3$
$d/\Lambda = 0.6$ (3 anelli)	$d = 1.38$	$d = 1.725$	$d = 2.07$	$d = 2.415$	$d = 2.76$
$d/\Lambda = 0.8$ (2 anelli)	$d = 1.84$	$d = 2.3$	$d = 2.76$	$d = 3.22$	$d = 3.68$

**Tabella 2.1:** Riassunto dei valori assegnati ai parametri geometrici delle *PCF* triangolari, nelle simulazioni svolte.

Successivamente si sono ripetute le simulazioni facendo variare la distanza tra i fori  $\Lambda$  e il loro diametro  $d$ , mantenendo invariati i rapporti  $d/\Lambda$ . Precisamente, oltre a  $\Lambda = 2.3 \mu m$ , si sono considerati valori del passo  $\Lambda = 2.875 \mu m$ ,  $\Lambda = 3.45 \mu m$ ,  $\Lambda = 4.025 \mu m$  e  $\Lambda = 4.6 \mu m$ .

## Magni

---

*Dopo aver realizzato le simulazioni con  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ , per fare le simulazioni con gli altri valori di  $\Lambda$  si è utilizzato il programma `magni`. Esso richiede in ingresso due file: `tabelle.0` ed `estremi.0` e genera in uscita `tabelle.mag` ed `estremi.mag`. I due file sono generati tramite la moltiplicazione dei file d'ingresso per un fattore di scala impostato dall'utente. In questo modo, dando in ingresso al solutore `edght15_b` i file generati da `magni`, è possibile realizzare le simulazioni per strutture ridotte o ingrandite di un fattore di scala rispetto ad una struttura nota, senza dovere rifare la geometria, la mesh e la mappatura. Conseguentemente si ha un notevolissimo risparmio di tempo. L'unico problema riguarda la visualizzazione dei risultati ottenuti tramite il postprocessore di `GID`. Infatti è necessario fornire in ingresso a `postgid` i file `tabelle` ed `estremi` nella loro versione originale. Quello che si visualizza è la reale distribuzione del campo magnetico nella struttura ridotta o ingrandita, ma sovrapposta al reticolo originale, che quindi conserva le sue dimensioni originali.*

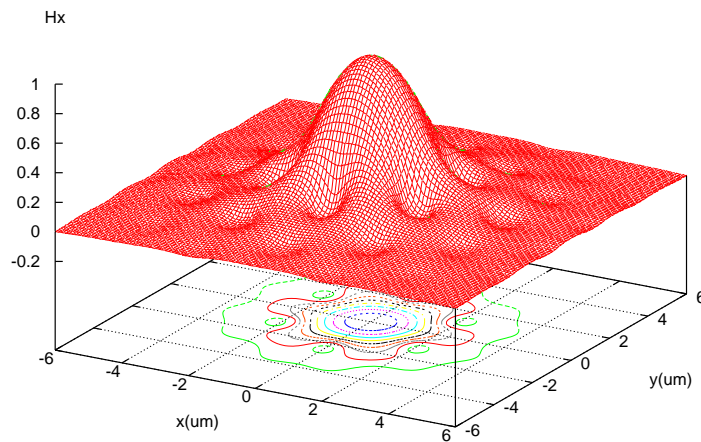
---

## Distribuzione del campo elettromagnetico

L'andamento della componente fondamentale  $H_x$  del campo magnetico per i modi guidati del segnale a  $1560 \text{ nm}$  nei casi di due diversi rapporti  $d/\Lambda$ , mostrati nella figura 2.5 e nella figura 2.6, evidenzia l'elevato grado di confinamento ottenuto con la fibra a cristalli fotonici con reticolo triangolare.

È evidente che all'aumentare del rapporto  $d/\Lambda$  il campo rimane maggiormente confinato all'interno del primo anello e al di fuori dei fori. Infatti

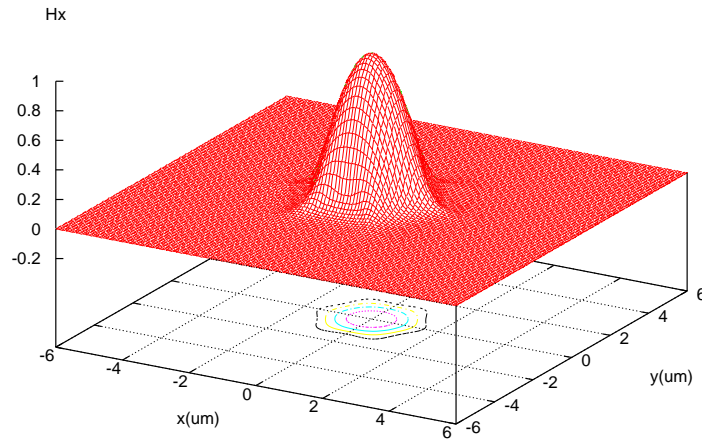
con un diametro dei fori maggiore, l'indice di rifrazione medio del cladding diminuisce, enfatizzando la differenza tra gli indici di rifrazione del core e del cladding, da qui il maggiore effetto guidante. Per le stesse motivazioni, per potere studiare fibre con diversi rapporti  $d/\Lambda$ , mantenendo l'attenuazione a livelli sufficientemente bassi, è necessario aumentare il numero degli anelli di fori, man mano che quest'ultimi diventano più piccoli.



**Figura 2.5:** Ampiezza della componente dominante del campo magnetico del modo fondamentale  $H_{11}^x$  a  $1560\text{ nm}$  che si propaga nella *PCF* triangolare, con  $d/\Lambda = 0.35$  e  $\Lambda = 2.3\ \mu m$ .

Un effetto analogo al precedente, si manifesta all'interno di due fibre con il medesimo rapporto  $d/\Lambda$ , ma con diversi valori di  $d$  e  $\Lambda$ . Infatti quando i fori sono più grandi, ma anche maggiormente distanziati, rimane un'area centrale di silice più estesa, quindi un core più grande, che garantisce una distribuzione del campo maggiormente raccolta all'interno del core stesso,



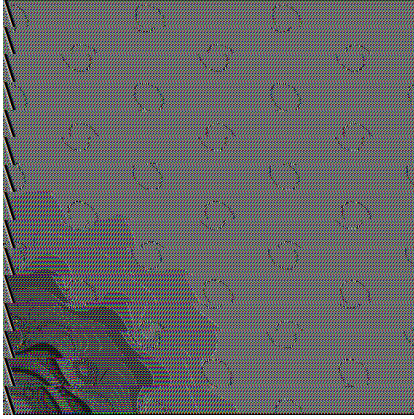
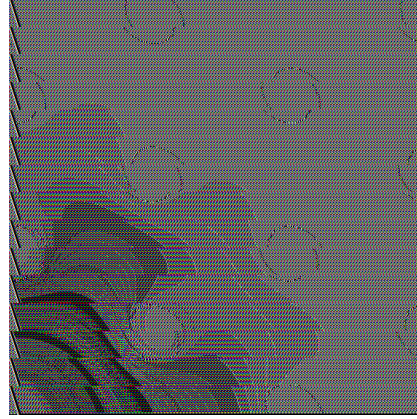


**Figura 2.6:** Ampiezza della componente dominante del campo magnetico del modo fondamentale  $H_{11}^x$  a  $1560 \text{ nm}$  che si propaga nella *PCF* triangolare, con  $d/\Lambda = 0.8$  e  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ .

come mostrato in figura 2.7. Si nota che in 2.7(a) il campo è confinato all'interno di tre anelli di fori, mentre in 2.7(b)  $H_x$  è non nullo all'interno di soli due anelli; inoltre nel primo caso si rileva la presenza di campo all'interno dei fori, soprattutto del primo anello, in quantità maggiore rispetto al secondo caso.

### *PCF* triangolare in regime multimodale

Si è detto che le fibre con alti valori del rapporto  $d/\Lambda$  garantiscono un migliore confinamento del campo all'interno del core, ma, analogamente a quanto avviene con la fibra step aumentando la differenza tra l'indice di rifrazione del core e del cladding, si rischia di perdere il regime di monomodalità. Si è quindi resa necessaria una verifica della monomodalità delle fibre studiate, che ha portato ad affermare che le fibre con il rapporto  $d/\Lambda$  pari o superiore

(a)  $\Lambda = 2.3 \mu m$ ,  $d = 0.805 \mu m$ (b)  $\Lambda = 4.6 \mu m$ ,  $d = 1.61 \mu m$ 

**Figura 2.7:** Ampiezza della componente dominante del campo magnetico del modo fondamentale  $H_{11}^x$  a  $1560 \text{ nm}$  che si propagano in fibre triangolari, con  $d/\Lambda = 0.35$  con due diversi valori di  $\Lambda$ , visualizzati con il postprocessore di GID.

a 0.5 effettivamente sono multimodali. La ricerca dei modi secondari è stata realizzata per il caso peggiore, quindi alla lunghezza d'onda della pompa. La frequenza della pompa infatti è maggiore della frequenza del segnale e perciò supera maggiormente la frequenza di *cut off* dei modi secondari della fibra considerata. Nei casi in cui si è riscontrata la multimodalità è stato calcolato il valore di attenuazione del modo secondario per la lunghezza d'onda della pompa: se questa è molto elevata, allora si può studiare la fibra come se fosse monomodale. Infatti se il modo secondario presenta un'attenuazione dell'ordine di qualche decina di  $dB/m$ , esso si attenua quasi completamente sui tratti di fibra della lunghezza di alcuni metri, dimensioni degli amplificatori studiati.

Guardando le tabelle 2.2 e 2.3 si nota che l'attenuazione del primo modo secondario aumenta al diminuire del rapporto  $d/\Lambda$ , del numero di anelli e al diminuire di  $\Lambda$ . Nelle fibre a due anelli con  $d/\Lambda = 0.8$ , nel caso di

$\Lambda = 4.6 \mu m$  si propaga un modo secondario che presenta un'attenuazione di  $\alpha = 4.952875 \times 10^{-5} dB/m$ , mentre nel caso di  $\Lambda = 2.3 \mu m$  presenta un'attenuazione di  $\alpha = 1.045514 dB/m$ . Comunque sono valori troppo bassi, quindi tutte le fibre con  $d/\Lambda = 0.8$  non possono essere utilizzate per realizzare amplificatori ottici. Si può pensare di diminuire il numero di anelli, purtroppo con un solo anello la fibra, alla lunghezza d'onda del segnale, presenta un'attenuazione per il modo fondamentale dell'ordine di qualche centinaio di  $dB/m$ , che rende inutile il guadagno ottenuto dall'amplificatore. Il limite per realizzare un amplificatore con una *PCF* triangolare a due anelli è  $\Lambda = 2.3 \mu m$  con  $d/\Lambda = 0.75$  oppure  $\Lambda = 4.6 \mu m$  con  $d/\Lambda = 0.7$ . Con le *PCF* con tre anelli, invece, non è possibile realizzare un amplificatore nel caso di  $d/\Lambda = 0.75$ , mentre nel caso di  $d/\Lambda = 0.7$ ,  $\Lambda$  deve essere uguale o minore a  $3.45 \mu m$ , per tutti i valori di  $d/\Lambda$  minori non ci sono problemi.

$[dB/m]$	$\Lambda = 2.3 \mu m$	$\Lambda = 2.875 \mu m$	$\Lambda = 3.45 \mu m$	$\Lambda = 4.025 \mu m$	$\Lambda = 4.6 \mu m$
$d/\Lambda = 0.7$	$3.819 \times 10^4$	–	–	$5.051 \times 10^1$	$1.655 \times 10^1$
$d/\Lambda = 0.75$	$2.332 \times 10^2$	$1.021 \times 10^1$	$1.042 \times 10^0$	$1.649 \times 10^{-1}$	–
$d/\Lambda = 0.8$	$1.046 \times 10^0$	–	–	$3.817 \times 10^{-4}$	$4.953 \times 10^{-5}$

**Tabella 2.2:** Valori dell'attenuazione che subisce il primo modo secondario che si propaga nella *PCF* triangolare con due anelli.

### Amplificazione nella fibra triangolare

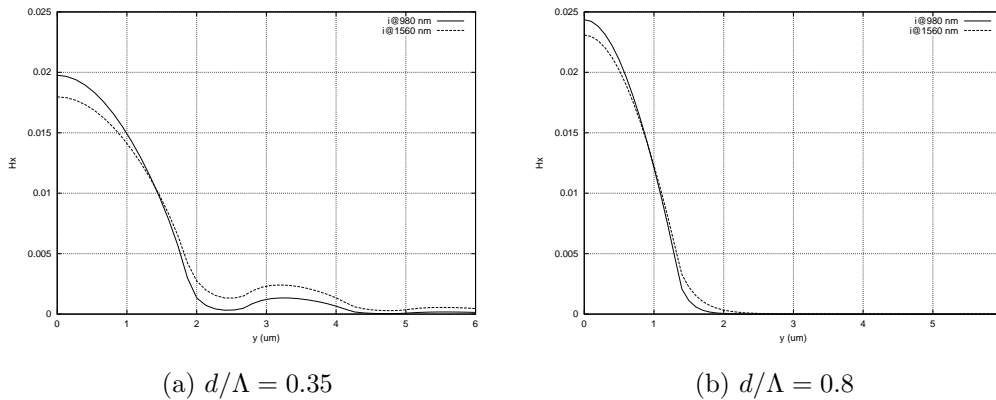
Le simulazioni dell'amplificatore sono state svolte con una potenza di pompa di  $100 mW$  a  $980 nm$  e con 13 segnali compresi tra  $1540 nm$  e  $1600 nm$ , con una spaziatura di  $625 GHz$  e una potenza per canale di  $-30 dBm$ . È stata scelta una lunghezza  $L$  della fibra di  $8 m$ , si vedrà che in quasi tutti i casi

$[dB/m]$	$\Lambda = 2.3 \mu m$	$\Lambda = 2.875 \mu m$	$\Lambda = 3.45 \mu m$	$\Lambda = 4.025 \mu m$	$\Lambda = 4.6 \mu m$
$d/\Lambda = 0.6$	–	–	–	–	$4.067 \times 10^3$
$d/\Lambda = 0.65$	–	–	–	–	$2.335 \times 10^3$
$d/\Lambda = 0.7$	–	$1.455 \times 10^3$	$2.017 \times 10^1$	$1.534 \times 10^0$	$2.354 \times 10^{-1}$
$d/\Lambda = 0.75$	$7.646 \times 10^0$	$3.429 \times 10^{-2}$	$1.061 \times 10^{-3}$	–	–

**Tabella 2.3:** Valori dell'attenuazione che subisce il primo modo secondario che si propaga nella *PCF* triangolare con tre anelli.

studiati la lunghezza ottima per il segnale a  $1550 \text{ nm}$  risulta minore.

Il profili della componente dominante del campo magnetico  $H_{11}^x$  mostrati in figura 2.8 permettono di notare che il grande confinamento dei campi produce integrali di *overlap* tra il drogante e l'intensità normalizzata stessa molto buoni. Inoltre i profili della pompa e del segnale avendo un andamento molto simile, con valori di picco quasi uguali, rendono possibile una buona sovrapposizione tra pompa, segnale e ioni d'erbio. Questa è la condizione per avere una grande amplificazione.

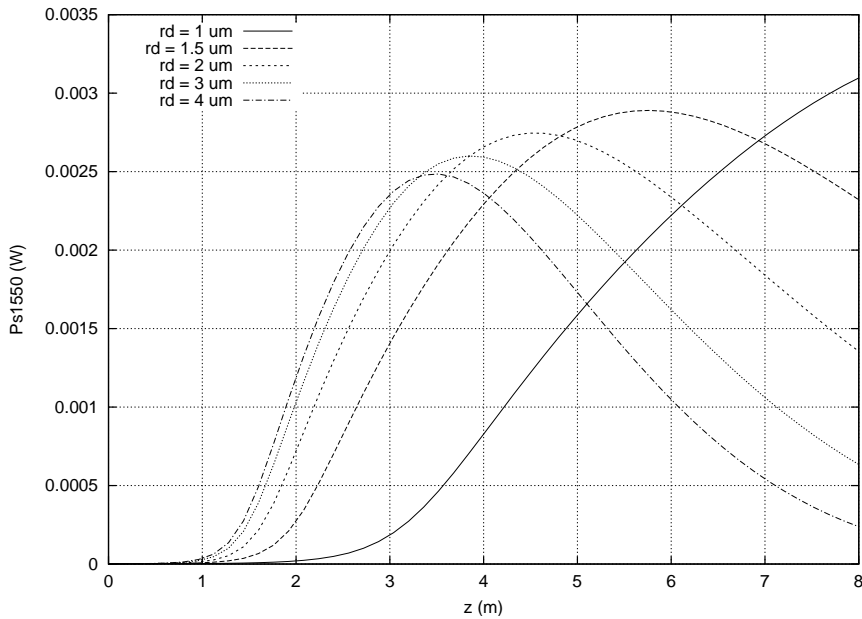


**Figura 2.8:** Andamenti delle componenti dominanti del campo magnetico  $H_{11}^x$  del segnale e della pompa per  $x = 0$  in *PCF* triangolari, con  $\Lambda = 2.3 \mu m$ , ma con diverso valore del rapporto  $d/\Lambda$ .

### Variazione del raggio del drogante $r_d$

Le simulazioni dell'amplificatore sono state realizzate per diversi valori del raggio  $r_d$  della superficie drogata con erbio. La concentrazione di drogante è  $N_T = 1.74 \times 10^{25}$  ioni/ $m^3$ , supposta costante per ogni  $r_d$ . In questo modo non si conserva il numero totale di ioni presenti nella fibre di due diverse simulazioni, a causa dei diversi raggi della superficie drogata e della presenza dei fori d'aria che in alcuni casi si sovrappongono alla superficie drogata stessa. Ovviamente nei dei fori d'aria non è possibile incapsulare gli ioni d'erbio, quindi tutto il campo che cade al loro interno non contribuisce all'amplificazione. Inoltre questa scelta è concorde con i processi tecnologici di realizzazione degli amplificatori in fibra drogata, in cui la concentrazione di erbio non può superare una certa soglia senza introdurre effetti parassiti, dovuti a fenomeni di interazione tra gli atomi del drogante stesso.

Con una fibra avente il rapporto  $d/\Lambda = 3.5$  con  $\Lambda = 2.3 \mu m$ , è possibile ottenere dei livelli di amplificazione intorno ai  $35 dB$ , per il segnale a  $1550 nm$ . Come si vede in figura 2.9, aumentando il raggio del drogante all'interno della fibra, la lunghezza ottima della fibra e l'amplificazione massima del segnale diminuiscono. Infatti, con  $r_d$  grande, aumenta il numero di atomi d'erbio che interagiscono con le intensità della pompa e del segnale, accelerando il processo di amplificazione. Il calo del livello massimo del segnale è dovuto al fatto che le simulazioni sono state realizzate con una fibra lunga  $8 m$ , che è abbondantemente al di sopra della lunghezza ottima, quindi la potenza di pompa viene maggiormente assorbita dall'*ASE* contropropagante, esso infatti è l'unico fenomeno che avviene a valle della lunghezza ottima che fa sentire la sua influenza a monte di questa. Tale fenomeno verrà trattato meglio nel paragrafo 2.2.

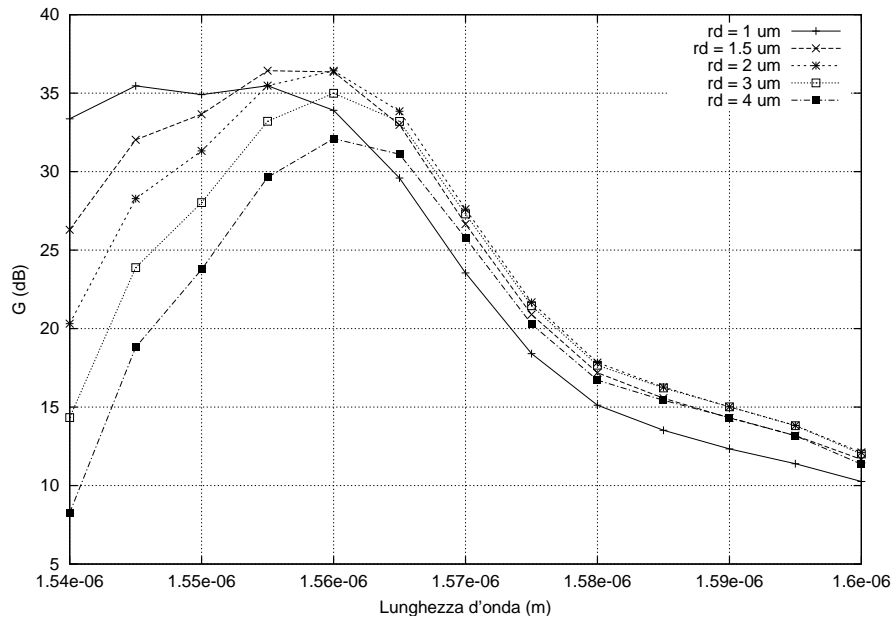


**Figura 2.9:** Andamento lungo  $z$  della potenza del segnale a  $1550 \text{ nm}$  per diversi valori di  $r_d$ , per la PCF triangolare con  $d/\Lambda = 0.35$  e  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ .

In figura 2.10 sono mostrati i guadagni dei segnali che si propagano all'interno della fibra con diversi valori della lunghezza d'onda  $\lambda$ . Si nota che per i segnali con  $\lambda$  compresa tra  $1540 \text{ nm}$  e  $1560 \text{ nm}$  il guadagno maggiore, intorno ai  $35 \text{ dB}$ , lo si ottiene con il raggio del drogante  $r_d = 1 \mu\text{m}$ , mentre i segnali a lunghezza d'onda più grande subiscono un'amplificazione più elevata con un  $r_d$  più esteso. Questo accade a causa della scelta della lunghezza della fibra,  $8 \text{ m}$ , vicina alla lunghezza ottima per i segnali con  $\lambda$  piccola nel caso di  $r_d = 1 \mu\text{m}$ , mentre nei casi di  $r_d$  più grandi, si avvicina maggiormente alla lunghezza ottima per i segnali con  $\lambda$  grande, meno confinati.

### Variazione del rapporto $d/\Lambda$

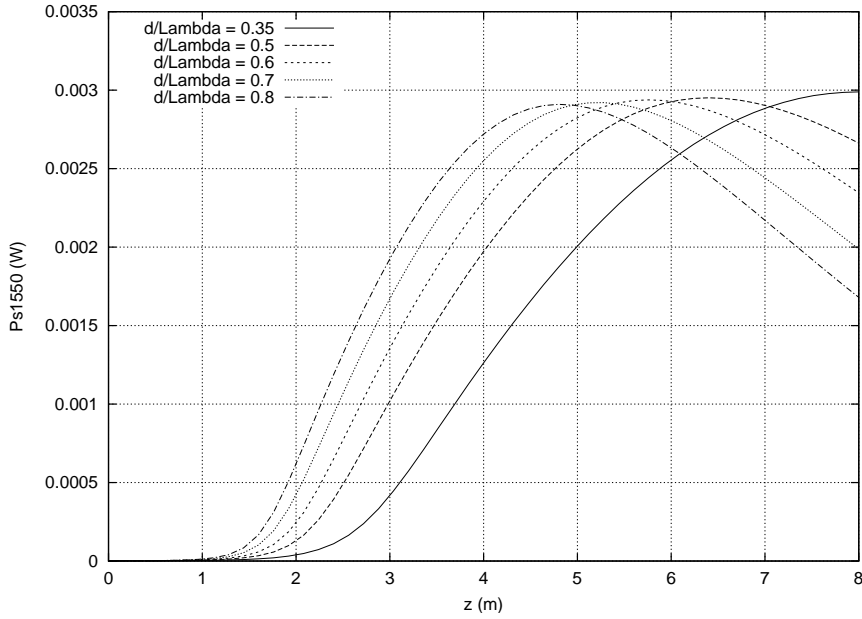
Si è già detto che aumentando il rapporto  $d/\Lambda$  si assiste ad un maggiore confinamento del campo, avvantaggiando le qualità di amplificazione della



**Figura 2.10:** Guadagno del segnale al variare della lunghezza d'onda per diversi valori di  $r_d$ , per la *PCF* triangolare, con  $d/\Lambda = 0.35$  e  $\Lambda = 2.3 \mu m$ .

fibra. Nella figura 2.11 sono mostrati i risultati delle simulazioni con un raggio della superficie drogata  $r_d = 1.5 \mu m$ , quindi abbastanza piccolo. I massimi delle curve che rappresentano gli andamenti lungo  $z$  dei segnali a  $1550 nm$  sono quasi allo stesso livello, cioè la potenza di pompa viene sfruttata nello stesso modo per tutti i diversi rapporti  $d/\Lambda$  considerati. Infatti in tutti i casi la superficie drogata rimane all'interno del picco centrale dell'intensità normalizzata. Quello che cambia è l'ampiezza del picco di intensità, essa è tanto più elevata quanto più elevato è il rapporto  $d/\Lambda$ , quindi la potenza di pompa viene completamente assorbita su di un tratto più breve della *PCF*. Ciò porta all'enorme vantaggio di avere delle lunghezze ottime della fibra più piccole.

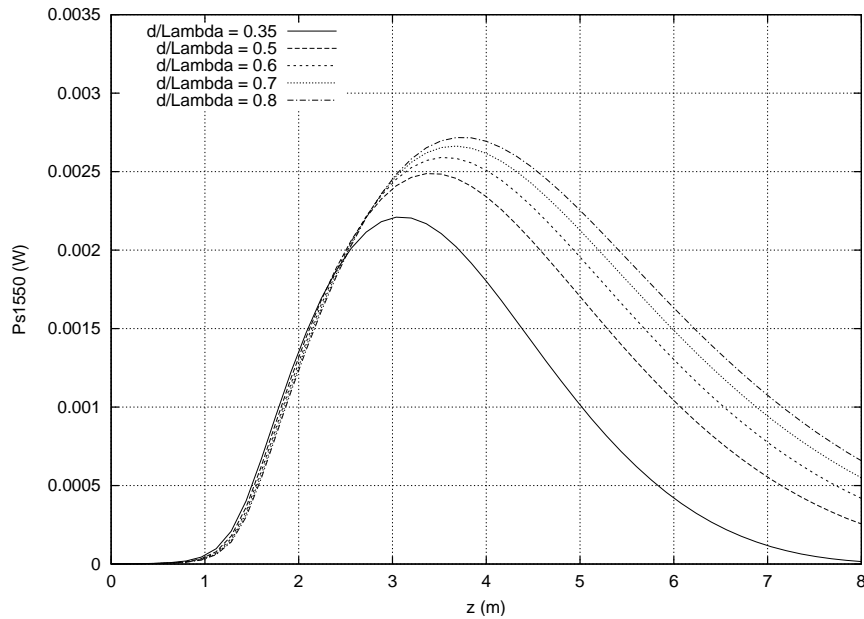
Se si considerano i risultati delle simulazioni con un raggio della superficie drogata  $r_d = 6 \mu m$ , mostrati in figura 2.12, si nota che la lunghezza



**Figura 2.11:** Andamento lungo  $z$  della potenza del segnale a  $1550 \text{ nm}$  per diversi valori di  $d/\Lambda$ , per la *PCF* triangolare, con  $\Lambda = 3.45 \mu\text{m}$ , per  $r_d = 1.5 \mu\text{m}$ .

ottima della fibra per diversi valori del rapporto  $d/\Lambda$  non subisce variazioni importanti come in precedenza. In questo caso ciò che varia sensibilmente è il livello del segnale a  $1550 \text{ nm}$ , a favore di quello che si propaga all'interno della fibra con  $d/\Lambda$  maggiore. Adesso l'area drogata ricopre completamente il picco centrale dell'intensità normalizzata, quello che fa preferire le fibre con un alto rapporto  $d/\Lambda$  è la migliore sovrapposizione tra l'intensità normalizzata della pompa con quella del segnale. In altre parole con  $d/\Lambda = 0.35$  ci sono zone della fibra in cui è presente l'intensità del segnale ma non quella della pompa ad invertire la popolazione, cosicché un grande numero di atomi d'erbio che vengono investiti da un fotone alla lunghezza d'onda del segnale  $\lambda_s$ , non hanno precedentemente assorbito energia da un fotone alla lunghezza d'onda della pompa  $\lambda_p$ . La figura 2.13 mostra le componenti dominanti dei campi magnetici  $H_{11}^x$  alle lunghezze d'onda di pompa  $\lambda_p$  e segnale  $\lambda_s$  nei due diversi casi  $d/\Lambda = 0.35$  e  $d/\Lambda = 0.8$ .

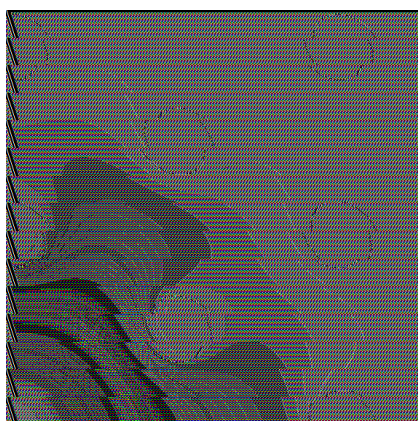
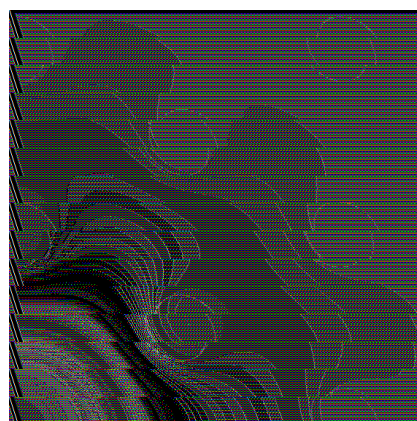
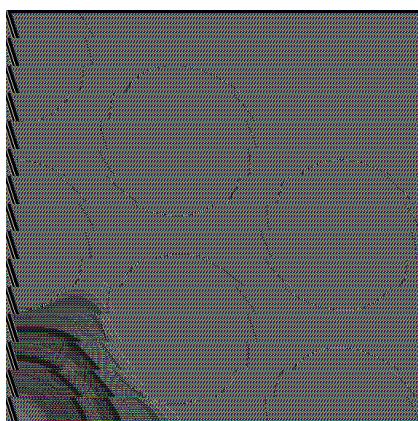
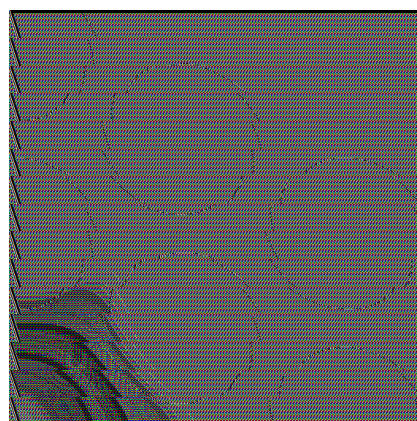




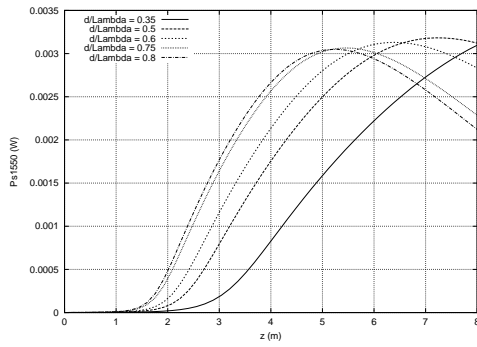
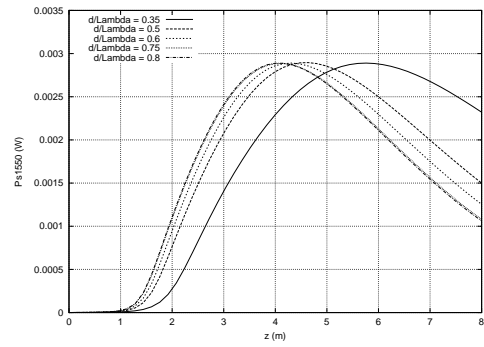
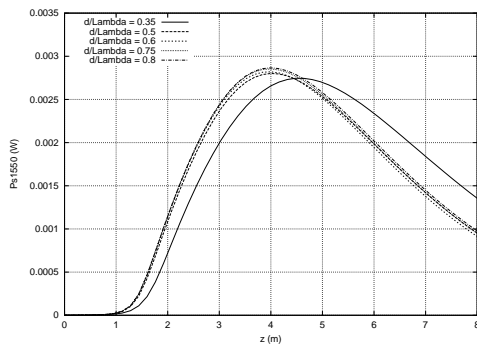
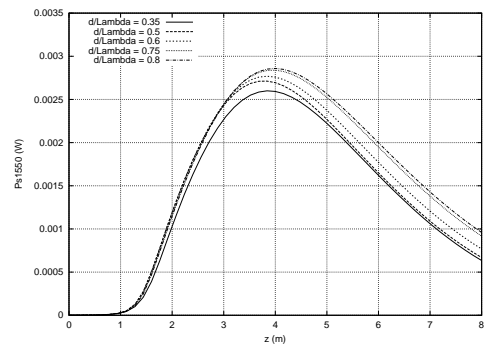
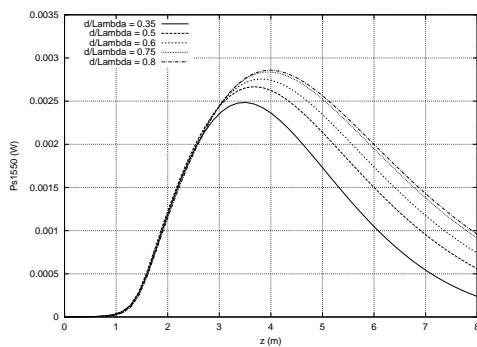
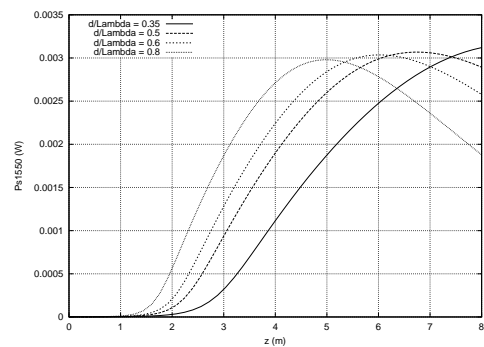
**Figura 2.12:** Andamento lungo  $z$  della potenza del segnale a  $1550 \text{ nm}$  per diversi valori di  $d/\Lambda$ , per la PCF con  $\Lambda = 3.45 \mu\text{m}$ , per  $r_d = 6 \mu\text{m}$ .

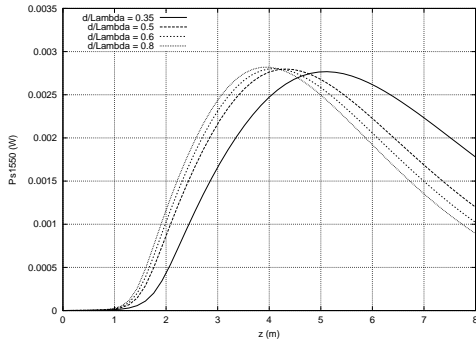
Essendo mantenuta costante la concentrazione degli ioni d'erbio all'interno della fibra, a parità di raggio del drogante  $r_d$ , l'aumento del rapporto  $d/\Lambda$  comporta una diminuzione del numero totale di ioni all'interno della fibra stessa. Infatti aumentano le dimensioni dei fori d'aria, dove non è presente il drogante, tuttavia il guadagno è maggiore. Questo avvalorava ulteriormente i buoni risultati ottenuti con fibre dall'elevato rapporto  $d/\Lambda$ .

Per completezza in figura 2.14 vengono riportati tutti i risultati ottenuti in questo ciclo di simulazioni, in particolare i grafici riguardano gli andamenti lungo  $z$  della potenza del segnale a  $1550 \text{ nm}$ . Ogni singolo grafico è stato realizzato per una determinata coppia di valori  $\Lambda$  ed  $r_d$  variando il rapporto  $d/\Lambda$ .

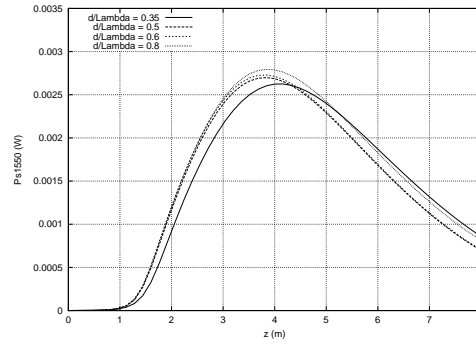
(a) Pompa,  $d/\Lambda = 0.35$ (b) Segnale,  $d/\Lambda = 0.35$ (c) Pompa,  $d/\Lambda = 0.8$ (d) Segnale,  $d/\Lambda = 0.8$ 

**Figura 2.13:** Andamenti delle componenti dominanti del campo magnetico  $H_{11}^x$  del segnale e della pompa nelle *PCF* triangolari, con  $\Lambda = 3.45 \mu m$ , ma con diverso valore del rapporto  $d/\Lambda$ .

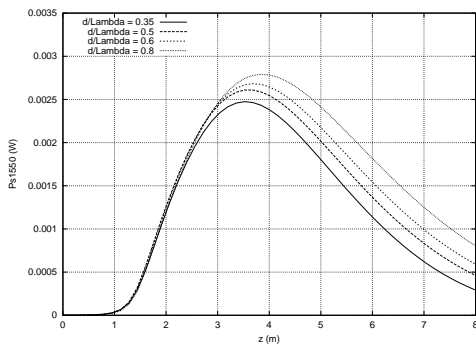
(a)  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 1 \mu\text{m}$ (b)  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 1.5 \mu\text{m}$ (c)  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 2 \mu\text{m}$ (d)  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 3 \mu\text{m}$ (e)  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 4 \mu\text{m}$ (f)  $\Lambda = 2.875 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 1.25 \mu\text{m}$



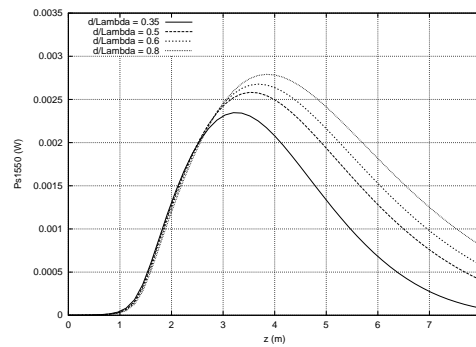
(g)  $\Lambda = 2.875 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 1.875 \mu\text{m}$



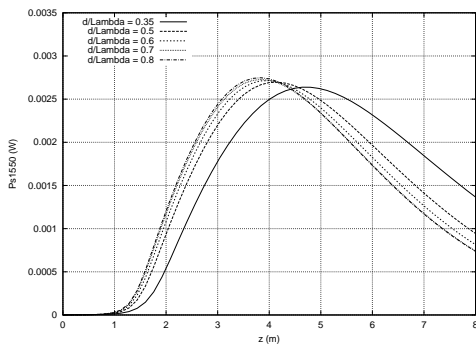
(h)  $\Lambda = 2.875 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 2.5 \mu\text{m}$



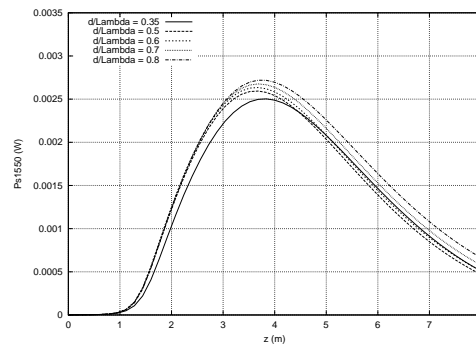
(i)  $\Lambda = 2.875 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 3.75 \mu\text{m}$



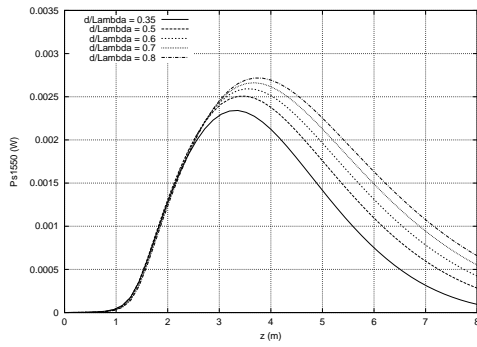
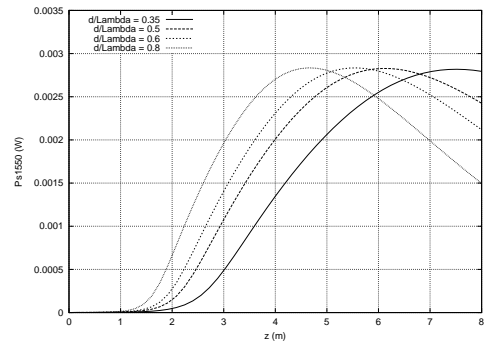
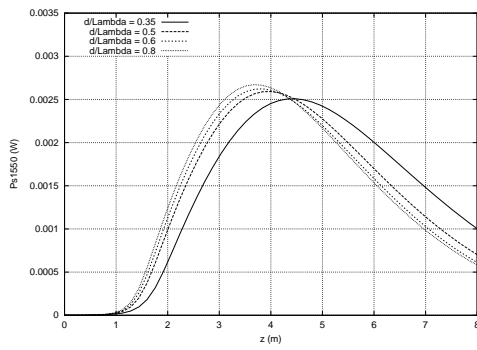
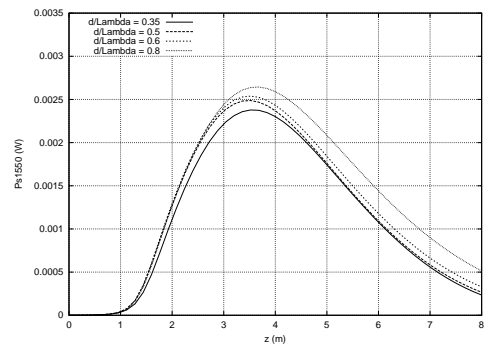
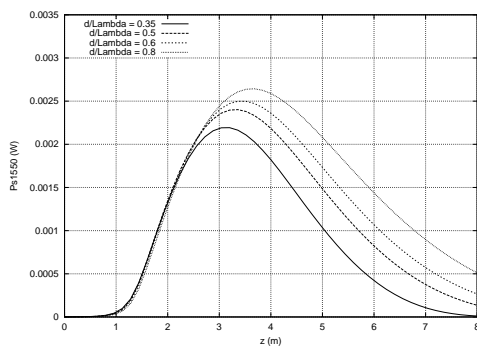
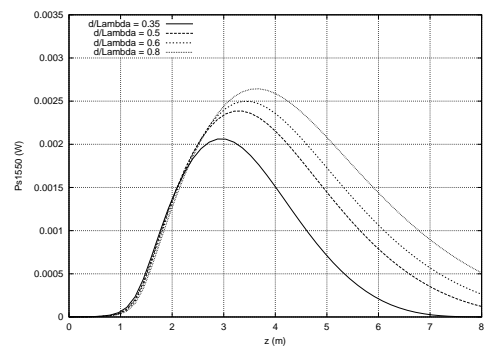
(j)  $\Lambda = 2.875 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 5 \mu\text{m}$

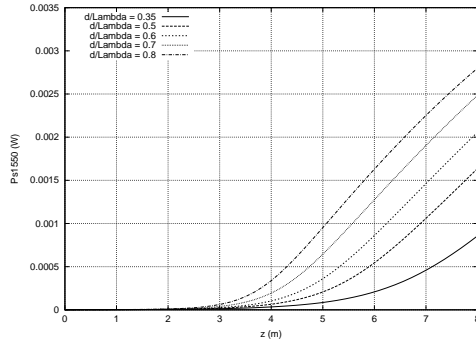
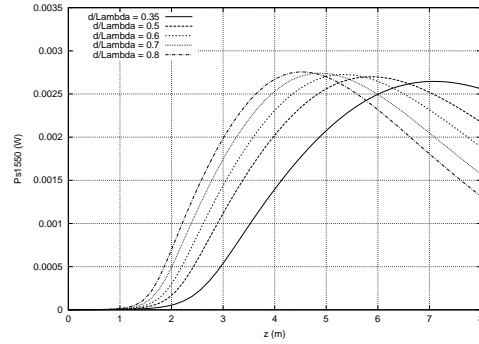
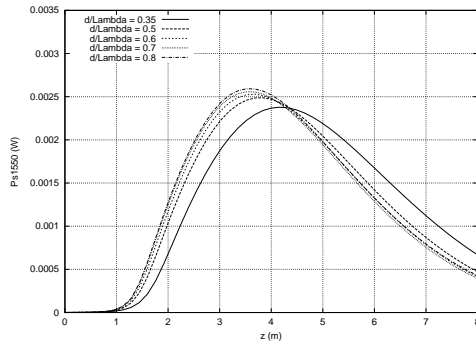
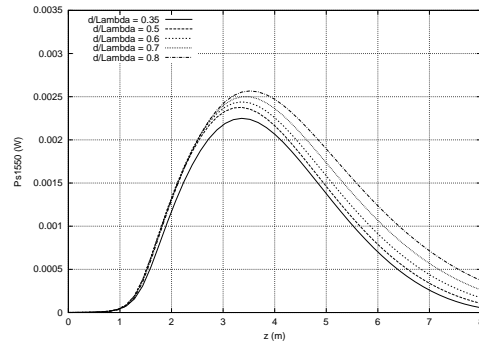
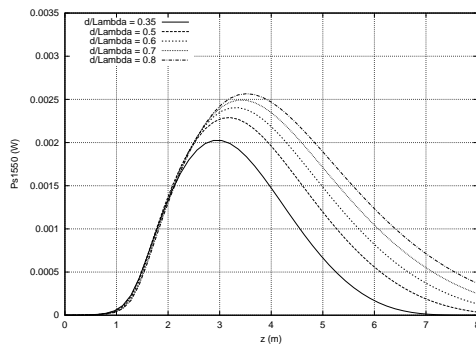
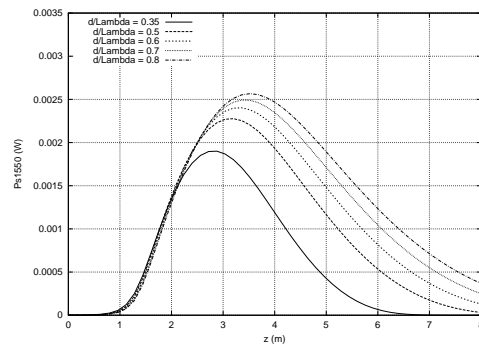


(k)  $\Lambda = 3.45 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 2.25 \mu\text{m}$



(l)  $\Lambda = 3.45 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 3 \mu\text{m}$

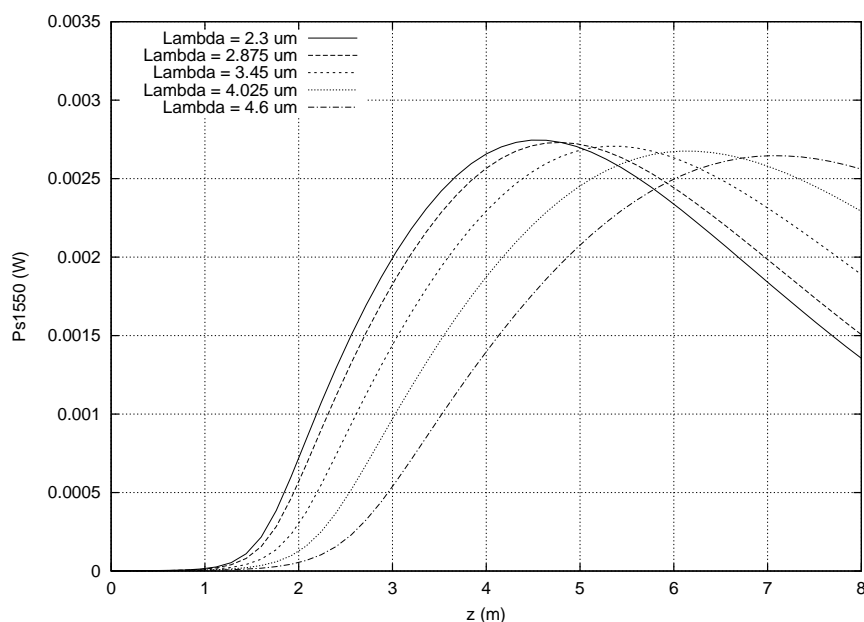
(m)  $\Lambda = 3.45 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 4.5 \mu\text{m}$ (n)  $\Lambda = 4.025 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 1.75 \mu\text{m}$ (o)  $\Lambda = 4.025 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 2.625 \mu\text{m}$ (p)  $\Lambda = 4.025 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 3.5 \mu\text{m}$ (q)  $\Lambda = 4.025 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 5.25 \mu\text{m}$ (r)  $\Lambda = 4.025 \mu\text{m}$ ,  $r_d = 7 \mu\text{m}$

(s)  $\Lambda = 4.6 \mu m, r_d = 1 \mu m$ (t)  $\Lambda = 4.6 \mu m, r_d = 2 \mu m$ (u)  $\Lambda = 4.6 \mu m, r_d = 3 \mu m$ (v)  $\Lambda = 4.6 \mu m, r_d = 4 \mu m$ (w)  $\Lambda = 4.6 \mu m, r_d = 6 \mu m$ (x)  $\Lambda = 4.6 \mu m, r_d = 8 \mu m$ 

**Figura 2.14:** Andamenti lungo  $z$  della potenza del segnale a  $1550 \text{ nm}$ , nelle *PCF* triangolari prese in esame, graficati per diversi valori di  $d/\Lambda$ .

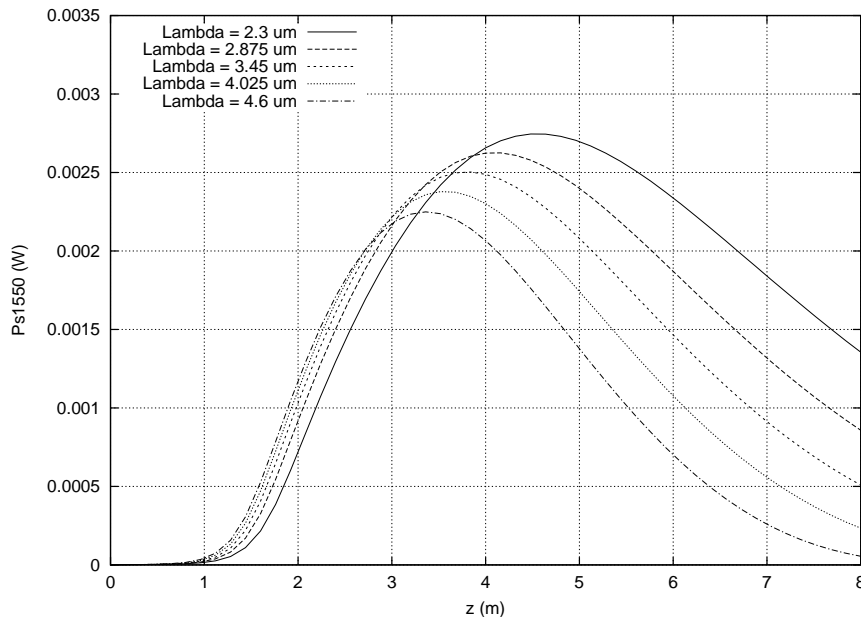
### Variazione della distanza fra i fori $\Lambda$

Variando la distanza fra i fori  $\Lambda$ , senza variare di conseguenza il diametro  $d$  degli stessi, il campo, sia alla lunghezza d'onda della pompa che alla lunghezza d'onda del segnale, rimane più confinato all'interno dei primi anelli di fori. Allargandosi il raggio del primo anello, si allarga proporzionalmente anche il raggio della campana dell'intensità normalizzata, come mostrato in figura 2.7. Questo ha un effetto deleterio sull'amplificazione: infatti ripetendo le simulazioni su di una medesima struttura scalando le dimensioni di un fattore crescente, mantenendo costante il raggio della superficie drogata  $r_d$ , si ottengono i risultati mostrati in figura 2.15. Si vede che la lunghezza ottima è crescente con il fattore di scala e la massima potenza che raggiunge il segnale è decrescente.



**Figura 2.15:** Andamento lungo  $z$  della potenza del segnale a  $1550\text{ nm}$  per diversi valori di  $\Lambda$ , per la *PCF* triangolare, con  $d/\Lambda = 0.35$ , per  $r_d = 2\ \mu\text{m}$ .

Svolgendo le stesse simulazioni moltiplicando però per il fattore di scala anche il raggio  $r_d$  della superficie drogata, si trova che il prezzo da pagare per una diminuzione della lunghezza ottima all' aumentare di  $\Lambda$  è una forte diminuzione della potenza massima raggiunta dal segnale a  $1550 \text{ nm}$ , in corrispondenza delle lunghezze ottime stesse. I risultati sono mostrati in figura 2.16.



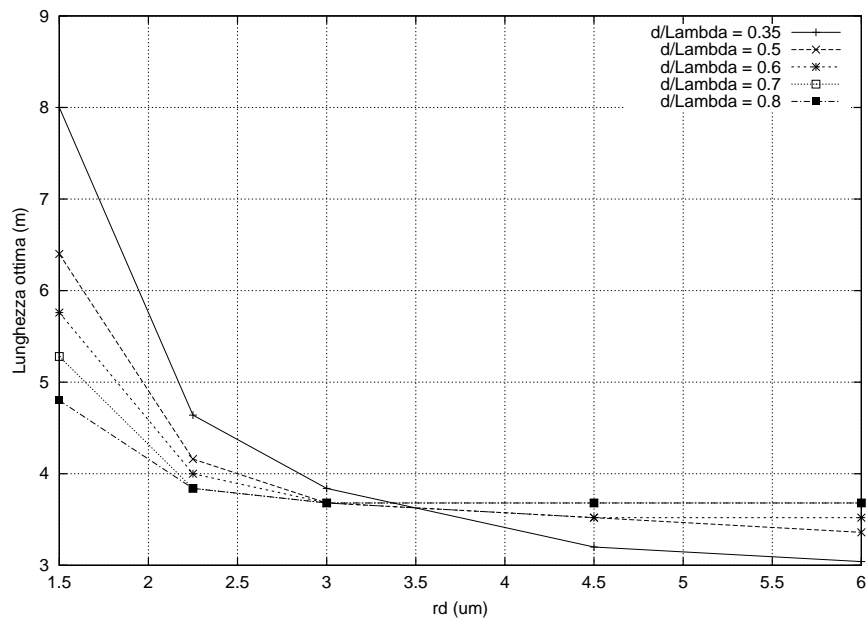
**Figura 2.16:** Andamento lungo  $z$  della potenza del segnale a  $1550 \text{ nm}$  per diversi valori di  $\Lambda$ , per la *PCF* triangolare, con  $d/\Lambda = 0.35$ , per  $r_d$  rispettivamente di  $2 \mu\text{m}$ ,  $2.5 \mu\text{m}$ ,  $3 \mu\text{m}$ ,  $3.5 \mu\text{m}$ ,  $4 \mu\text{m}$ .

### Variazione della lunghezza $L$ della fibra

Per molti dei casi studiati, la scelta della lunghezza della fibra drogata di  $8 \text{ m}$ , è ben oltre la lunghezza ottima della *PCF* stessa per il segnale di riferimento a  $1550 \text{ nm}$ . La figura 2.17 ci mostra che esiste un legame inverso tra il raggio



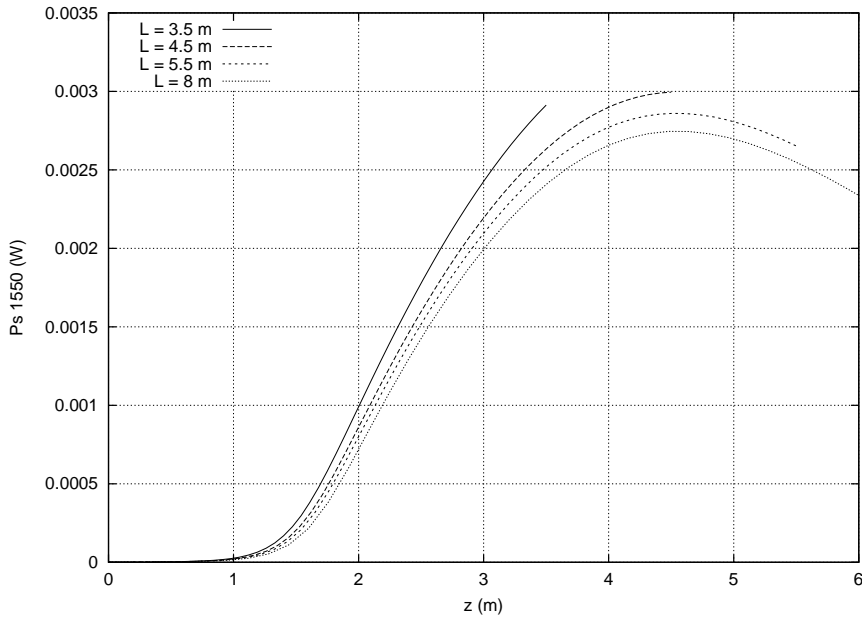
della superficie drogata  $r_d$  e il punto in cui si trova il massimo della potenza del segnale. Più è grande il rapporto  $d/\Lambda$ , maggiore è l'escursione tra il valore massimo, ottenuto per  $r_d$  piccoli, e il valore minimo, ottenuto per  $r_d$  grandi, della lunghezza ottima della fibra.



**Figura 2.17:** Lunghezze ottime della *PCF* triangolare con  $\Lambda = 3.45 \mu m$ , in funzione del raggio della superficie drogata  $r_d$ , per il segnale a  $1550 nm$ , per diversi valori di  $d/\Lambda$ .

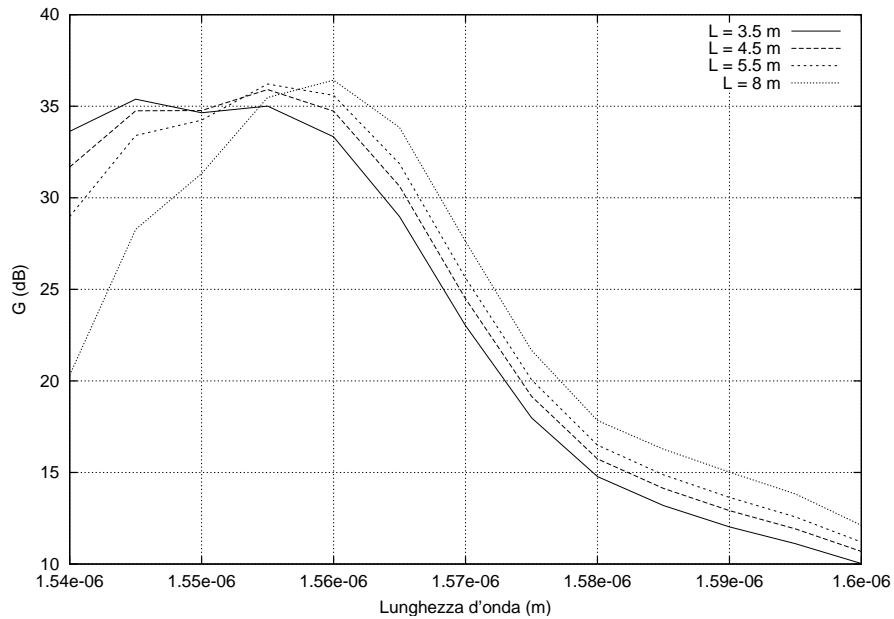
Ripetendo le simulazioni considerando le fibra della lunghezza ottima per il segnale a  $1550 nm$  ovviamente si ha una redistribuzione dei guadagni associati ad ogni lunghezza d'onda. Si alterano parecchio i valori del massimo della potenza associata al segnale di riferimento, in particolare, come mostrato in figura 2.18, accorciando la fibra drogata il segnale raggiunge un livello di potenza più alto. Infatti con la fibra di  $8 m$  la potenza della pompa è maggiormente assorbita dai segnali con lunghezza d'onda più grande, in-

oltre considerando una fibra più lunga il contributo dell'*ASE* diventa più importante. Ciò che non varia è la posizione sull'asse  $z$  dei massimi dei livelli di potenza, cioè la lunghezza ottima della fibra per un segnale ad una determinata lunghezza d'onda rimane invariata.



**Figura 2.18:** Andamento lungo  $z$  della potenza del segnale a 1550 nm nella PCF triangolare con  $d/\Lambda = 0.35$ ,  $\Lambda = 2.3 \mu\text{m}$  ed  $r_d = 2 \mu\text{m}$ , per diversi valori della lunghezza  $L$  della fibra.

In figura 2.19 si nota che i segnali a lunghezza d'onda  $\lambda$  più corta sono maggiormente amplificati se la fibra è breve. Infatti i segnali con  $\lambda$  minore sono più confinati, quindi gli integrali di sovrapposizione sono migliori e il processo di amplificazione avviene in un tratto di fibra più breve. Ovviamente, oltre la sua lunghezza ottima, un segnale non viene più amplificato, ma viene attenuato, perciò, se la fibra è molto lunga, i segnali con  $\lambda$  piccola, dopo essere stati amplificati, subiscono una forte attenuazione.

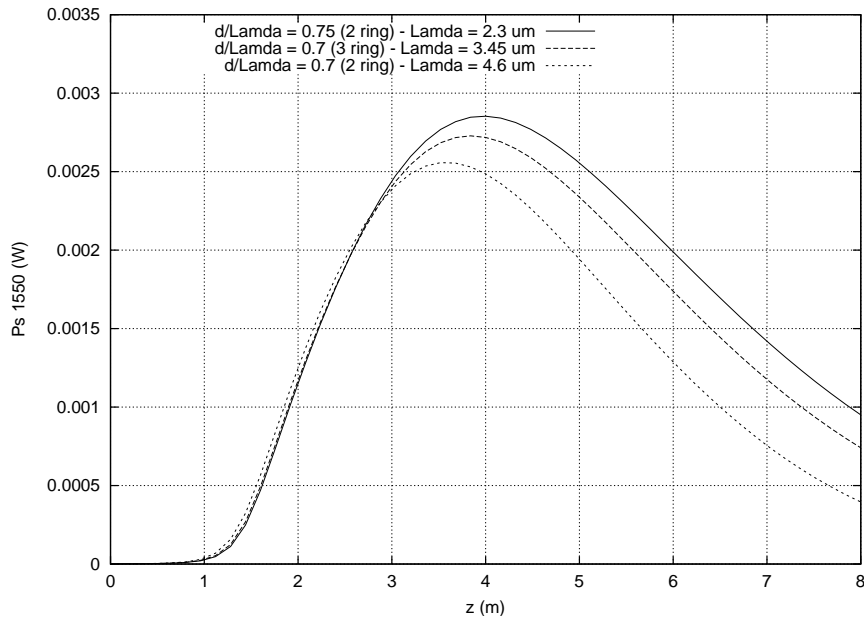


**Figura 2.19:** Guadagno del segnale al variare della lunghezza d'onda per diverse lunghezze della *PCF* triangolare, con  $d/\Lambda = 0.35$ ,  $\Lambda = 2.3 \mu m$  ed  $r_d = 2 \mu m$ .

### *PCF* con $d/\Lambda$ e $\Lambda$ al limite dell'utilizzabilità

Si è detto che per amplificare è possibile utilizzare fibre multimodali, a patto che l'attenuazione del primo modo secondario per la lunghezza d'onda della pompa non sia più piccola di qualche decina di *dB*. Si sono individuate tre combinazioni di valori del rapporto  $d/\Lambda$  e della distanza tra i fori  $\Lambda$  che si possono definire al limite dell'utilizzabilità. Per la precisione si sono realizzate le simulazioni con  $d/\Lambda = 0.75$  e  $\Lambda = 2.3 \mu m$  con due anelli, e con  $d/\Lambda = 0.7$ , sia con  $\Lambda = 3.45 \mu m$  che con  $\Lambda = 4.6 \mu m$ , rispettivamente con tre anelli e due anelli.

In figura 2.20 sono mostrati gli andamenti della potenza del segnale lungo  $z$ , grazie al miglior confinamento dei campi ottenibile, sono risultati molto buoni; è da notare che sono stati scelti valori del raggio del drogante  $r_d$  multi-



**Figura 2.20:** Andamento lungo  $z$  della potenza del segnale a  $1550 \text{ nm}$  nella *PCF* triangolare, con i valori di  $d/\Lambda$  e di  $\Lambda$  al limite dell'utilizzabilità, con  $r_d$  rispettivamente di  $1.5 \mu\text{m}$ ,  $2.25 \mu\text{m}$  e  $3 \mu\text{m}$ .

plicati per lo stesso fattore di scala di  $\Lambda$ . Anche in questo caso si ottengono dei vantaggi nel considerare la fibra con  $\Lambda$  minore, tuttavia è necessario tenere in considerazione l'effetto dell'abbassamento del livello di potenza subito dai segnali per cui la lunghezza ottima è più piccola dell'effettiva lunghezza della fibra.

## Conclusioni

Dalle simulazioni complessivamente emerge che l'amplificazione trae vantaggi considerando *PCF* con il maggiore rapporto  $d/\Lambda$  possibile, ricordando i limiti entro cui una fibra multimodale può essere utilizzata come amplificatore. L'aumento della distanza tra i fori  $\Lambda$ , invece, non arreca gli stessi vantaggi all'amplificazione. Il raggio  $r_d$  della superficie drogata influisce decisamente sulla distribuzione delle potenze tra i vari segnali con diverse lunghezze d'on-

da, per il segnale di riferimento a  $1550\text{ nm}$  un buon compromesso tra lunghezza ottima della fibra e livello di potenza raggiunto dal segnale è rappresentato dalla scelta di  $r_d$  coincidente con la metà della larghezza del lobo principale dell'intensità normalizzata dei campi. Anche la lunghezza della fibra è un parametro fondamentale per la distribuzione delle potenze dei vari segnali all'interno della fibra: è necessario pure in questo caso scegliere un giusto compromesso che tenga conto delle esigenze imposte da un determinato progetto. Un parametro molto importante per gli amplificatori è l'equalizzazione del guadagno alle diverse lunghezze d'onda, a questo proposito un ottimo risultato è rappresentato dalla fibra con  $d/\Lambda = 0.35$ ,  $\Lambda = 2.3\ \mu\text{m}$  e  $r_d = 2\ \mu\text{m}$ , della lunghezza di  $3.5\text{ m}$ , mostrata in figura 2.19.

Grazie ai risultati mostrati in figura 2.20, è possibile affermare che le migliori scelte dei parametri  $\Lambda$  e  $d$  per realizzare un amplificatore su una fibra a cristalli fotonici con geometria triangolare, siano quelle discusse nel paragrafo 2.2. Tuttavia è possibile migliorare ulteriormente questi risultati agendo su altri parametri quali il raggio della superficie drogata  $r_d$  e soprattutto la lunghezza della fibra, per i quali non sono state realizzate simulazioni sufficientemente esaustive.

## Capitolo 3

# Il modello $z$ -invariante per l'amplificatore

Il simulatore per l'amplificatore ottico utilizzato, basato sul modello spaziale, fornisce ottimi risultati, tuttavia necessita di uno sforzo computazionale notevole, che limita le velocità di simulazione. Facendo riferimento ad un articolo di *Hernández-Figueroa* pubblicato nel 1999 [Her99], si è cercato di realizzare un modello alternativo ai classici modelli spaziale e spettrale, che sfruttano il metodo di *Runge-Kutta*.

I modelli teorici per predire il comportamento degli amplificatori ottici possono essere classificati come analitici e numerici. I modelli analitici fanno uso di forti ipotesi semplificative, come trascurare l'*ASE*, sostituendo gli integrali spaziali di *overlap* con costanti approssimate. D'altra parte i modelli numerici rendono possibile una determinazione dei campi elettromagnetici più realistica, producendo risultati più precisi, specialmente quando la distribuzione spaziale del campo e del drogante subiscono brusche variazioni. Considerando  $z$  come la coordinata lungo la quale si ha la propagazione,

i modelli numerici possono essere divisi in due gruppi: uno basato su una analisi  $z$ -variante e una basata su una analisi  $z$ -invariante.

Nei modelli  $z$ -varianti, la propagazione del campo elettromagnetico può essere considerata attraverso il metodo detto *BPM* (*Beam Propagation Method*), che ricalcola la distribuzione del campo ad ogni passo lungo la coordinata  $z$ . Questo metodo è molto lento, più veloce è invece il metodo basato sull'iterazione di *Runge-Kutta* [Zob93]. L'*RKM* (*Runge-Kutta Method*), analogamente alla teoria dei modi accoppiati, prevede il calcolo della distribuzione del campo elettromagnetico solo nel caso imperturbato, cioè in assenza di drogante. Successivamente si procede in modo iterativo al calcolo della potenza del segnale ad ogni passo lungo  $z$ .

Nei modelli  $z$ -invarianti si suppone che il mezzo non cambi lungo  $z$ . La struttura è quindi una struttura cilindrica caratterizzata da dei modi con costante di propagazione complessa  $\gamma$ . La principale ipotesi di questo approccio è che il campo si propaghi con una costante di propagazione complessa  $\gamma$  indipendente da  $z$ , analogamente all'analisi modale, il che equivale ad assumere che all'interno della guida d'onda o della fibra l'intensità del campo segua un andamento esponenziale. Questa supposizione è essenzialmente valida per guide d'onda o fibre "corte", cioè dove il livello di inversione di popolazione rimane stabile sulla coordinata di propagazione:

$$\frac{\partial N_1(x, y, z, \omega)}{\partial z} \cong 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial N_2(x, y, z, \omega)}{\partial z} \cong 0 \quad (3.2)$$

Come conseguenza si ha che la suscettività complessa  $\chi_{Er}$ , dovuta alla presenza dell'erbio, generalmente  $z$ -variante ( $\chi_{Er} = \chi_{Er}(x, y, z, \omega)$ ), non varia lungo  $z$ ,

in modo da poter essere considerata costante. Infatti la suscettibilità complessa è funzione delle popolazioni  $N_1 = N_1(x, y, z, \omega)$  ed  $N_2 = N_2(x, y, z, \omega)$  dei livelli fondamentale e metastabile  ${}^4I_{15/2}$  e  ${}^4I_{13/2}$ , che si è detto essere costanti per guide d'onda e fibre "corte":  $\chi_{Er}$  risulta essere  $z$ -invariante,  $\chi_{Er} = \chi_{Er}(x, y, \omega)$ . L'analisi numerica segue, quindi, lo schema dell'analisi modale, ovvero nella risoluzione di un problema agli autovalori. Questo tipo di problema numerico è risolto più velocemente rispetto i metodi *BPM* o *RKM*. Infatti risolvendo il sistema perturbato dalla presenza del drogante (tale perturbazione si esprime proprio attraverso la suscettibilità complessa  $\chi_{Er}$ , sommata al quadrato dell'indice di rifrazione del materiale ospite non drogato  $n^2$ ), attraverso l'analisi modale, il campo elettromagnetico si esprime:

$$\overline{\mathcal{H}}(x, y, z) = \overline{H}(x, y)e^{-\gamma z} \quad (3.3)$$

con la costante di propagazione complessa  $\gamma$ , dipendente dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  (o, equivalentemente, dalla pulsazione  $\omega$ ) del segnale:

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \quad (3.4)$$

dove  $\alpha(\omega)$  è la costante di attenuazione e  $\beta(\omega)$  è la costante di fase. La parte reale di  $\gamma(\omega)$  fornisce il guadagno dell'amplificatore ottico  $G(\omega)$  [Her99], [Des94]. In regime di monomodalità, per una guida d'onda o una fibra drogate si può scrivere:

$$G_{dB}(\omega) = 10 \log \left[ \exp(2 \Re\{\gamma(\omega)\}L) \right] \quad (3.5)$$

dove  $G_{dB}(\omega)$  è il guadagno espresso in *decibels* ed  $L$  è la lunghezza dell'amplificatore. È importante notare, come già anticipato, che, essendo il legame



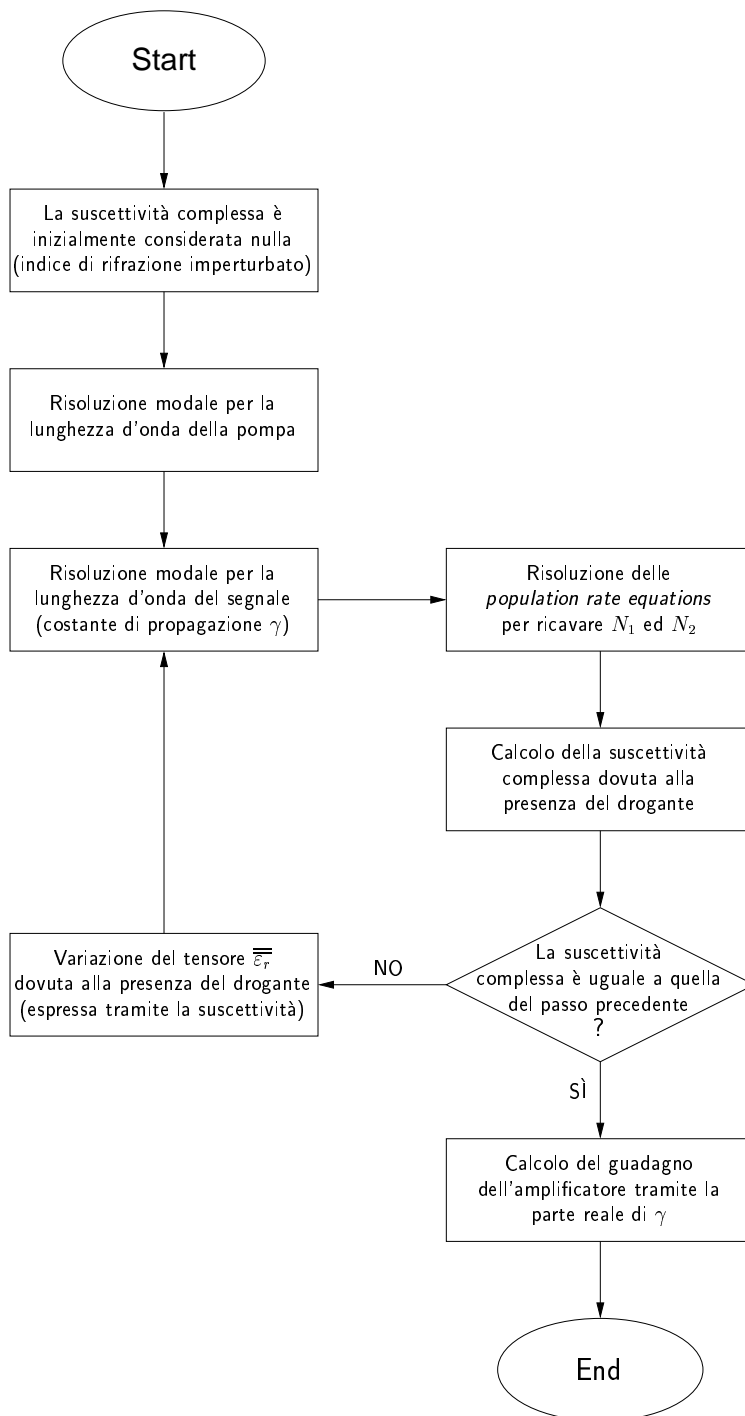
tra  $G_{dB}$  ed  $L$  lineare, allora tra il guadagno  $G = P_{sout}/P_{sin}$  (quindi tra la potenza di uscita del segnale  $P_{sout}$ ) e la lunghezza dell'amplificatore  $L$ , vige un legame esponenziale.

Un ulteriore vantaggio di questo approccio rispetto i modelli  $z$ -varianti deriva proprio dal calcolo della suscettività complessa dovuta alla presenza dell'erbio. Infatti mentre la parte immaginaria di  $\chi_{Er}$  è legata alla costante di attenuazione  $\alpha$  del modo, quindi al guadagno del dispositivo; la parte reale di  $\chi_{Er}$  è legata al comportamento non lineare dell'amplificatore ottico [Des94]. La modellizzazione del comportamento non lineare è molto importante per lo sviluppo dei dispositivi ottici integrati, dove più effetti, come amplificazione, commutazione e dissipazione, possono coesistere sullo stesso chip. La parte reale di  $\chi_{Er}$  determina quindi un cambiamento dell'indice di rifrazione  $\delta n(\omega)$  rispetto all'indice di rifrazione del materiale ospite. La variazione è data da:

$$\delta n(x, y, \omega) \cong \Re \left\{ \frac{\chi_{Er}(x, y, \omega)}{2n(x, y)} \right\} \quad (3.6)$$

dove è stata esplicitata la dipendenza di  $\chi_{Er}$  e di  $n$  (quindi anche di  $\delta n$ ) dalle coordinate della sezione trasversa della guida d'onda o della fibra.

In figura 3 è rappresentato il diagramma di flusso che sintetizza i passi del modello  $z$ -invariante per l'amplificatore, basato sul solutore modale. Innanzitutto si considera il sistema imperturbato, cioè la guida d'onda o la fibra non drogata, questo equivale a dire che la suscettività complessa  $\chi_{Er}$  è inizialmente nulla. Risolvendo il sistema per le lunghezze d'onda della pompa e del segnale si ricava il profilo dei campi elettromagnetici corrispondenti e quindi il profilo dell'intensità. In base alle *cross sections* di emissione e di assorbimento e all'intensità dei campi elettromagnetici incidenti, si è in grado di ricavare le frequenze di transizione tra i diversi livelli energetici in cui



**Figura 3.1:** Diagramma di flusso rappresentante il modello del solutore modale per l'amplificatore.

si possono trovare gli ioni d'erbio. Essendo nota la concentrazione  $N_T(x, y)$  di ioni d'erbio presenti nel sistema, si risolvono le *population rate equations*, le quali forniscono la stima delle popolazioni  $N_1$  ed  $N_2$  dei livelli energetici fondamentale  ${}^4I_{15/2}$  e metastabile  ${}^4I_{13/2}$ , sulla sezione trasversa della guida d'onda o della fibra. La conoscenza delle popolazioni permette di calcolare i valori della suscettività complessa  $\chi_{Er}(x, y, \omega)$  dovuta alla presenza dell'erbio nel sistema. Il drogante provoca una variazione del tensore di permittività elettrica relativa  $\bar{\epsilon}_r$  rispetto il caso imperturbato, che si esprime proprio attraverso la suscettività complessa. A questo punto si risolve nuovamente il sistema, ora perturbato dalla presenza dell'erbio, con il solutore modale. I passi precedenti vengono ripetuti affinché si abbia convergenza per i valori della suscettività complessa  $\chi_{Er}(x, y, \omega)$ , calcolati per due passi consecutivi, su tutta la sezione trasversa della guida d'onda o della fibra. Una volta che si è arrivati alla convergenza, il guadagno dell'amplificatore  $G_{dB}$ , espresso in *decibels*, si ricava, tramite l'equazione (3.5), dalla parte immaginaria della costante di propagazione complessa  $\gamma$ , ricavata all'ultimo passo dell'iterazione. Nelle prossime sezioni verranno approfonditi i principali concetti introdotti in questa sezione.

### 3.1 Il problema elettromagnetico

Per analizzare guide d'onda e fibre ottiche con forma e profilo dell'indice di rifrazione arbitrari e per calcolare le intensità normalizzate di pompa e segnale, si utilizza il *metodo vettoriale degli elementi finiti (VFEM)*, basato sull'approccio di *Galerkin* [Zob93]. Il calcolo dei modi è realizzato sotto l'ipotesi che, in assenza di drogante, le perdite della guida d'onda o della fibra siano nulle, infatti, a causa delle basse lunghezze degli amplificatori,

le perdite dovute al vetro sono piccole rispetto agli effetti di amplificazione o di assorbimento dovuti al drogante. Inoltre si suppone che la costante complessa di propagazione del modo  $\gamma$  e quindi i profili delle intensità normalizzate  $\psi_p(x, y)$  e  $\psi_s(x, y)$  siano  $z$ -invarianti. Il *VFEM* non richiede ipotesi semplificative sulle equazioni di partenza del campo elettromagnetico; inoltre il profilo dell'indice di rifrazione misurato si può introdurre direttamente nel computo. Il metodo consiste nella suddivisione della sezione della guida d'onda o della fibra (dominio  $\Omega$ ) in un insieme di  $K$  triangoli (il reticolo generato viene chiamato *mesh*) e nella trasformazione del problema differenziale, con assegnate le condizioni al contorno, in un problema algebrico agli autovalori equivalente, a cui segue la sua risoluzione.

L'equazione di partenza è la cosiddetta equazione del rotore-rotore, ottenuta disaccoppiando le equazioni di *Maxwell* [Zob97]:

$$\bar{\nabla} \times (\bar{p} \bar{\nabla} \times \bar{\Phi}) - k_0^2 \bar{q} \bar{\Phi} = 0 \quad (3.7)$$

dove  $k_0 = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onda nel vuoto e

$$\begin{cases} \bar{p} = \bar{\varepsilon}_r^{-1} \\ \bar{q} = \bar{\mu}_r \end{cases} \quad \text{se } \bar{\Phi} = \bar{H} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \bar{p} = \bar{\mu}_r \\ \bar{q} = \bar{\varepsilon}_r \end{cases} \quad \text{se } \bar{\Phi} = \bar{E} \quad (3.9)$$

sono i valori assunti dai tensori  $\bar{p}$  e  $\bar{q}$  nel caso che l'equazione del rotore-rotore (3.7) sia espressa nei termini del campo magnetico ( $\bar{\Phi} = \bar{H}$ ) oppure nei termini del campo elettrico ( $\bar{\Phi} = \bar{E}$ ).  $\bar{\varepsilon}_r$  è il tensore della permittività elettrica relativa, mentre  $\bar{\mu}_r$  è il tensore della permeabilità magnetica relati-

va; considerando un mezzo lineare isotropo i tensori sono diagonali con gli elementi sulla diagonale tutti uguali fra loro:

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_r = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{rz} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\bar{\bar{\mu}}_r = \begin{bmatrix} \mu_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

dove  $\varepsilon_{rx} = \varepsilon_{ry} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_r$  e  $\mu_{rx} = \mu_{ry} = \mu_{rz} = 1$ . Il termine  $\varepsilon_r$  comprende sia gli effetti dovuti al materiale ospite, sia gli effetti dovuti alla presenza del materiale attivo drogante [Her99]. In particolare:

$$\varepsilon_r(x, y, \omega) = n^2(x, y) + \chi_{Er}(x, y, \omega) \quad (3.12)$$

dove  $n(x, y)$  è l'indice di rifrazione del materiale ospite non drogato, mentre  $\chi_{Er}(x, y, \omega)$  è la suscettività complessa dovuta alla presenza del drogante.  $\varepsilon_r(x, y, \omega)$  è quindi una quantità complessa:

$$\varepsilon_r(x, y, \omega) = \varepsilon'_r(x, y, \omega) - j\varepsilon''_r(x, y, \omega) \quad (3.13)$$

proprio la parte immaginaria  $\varepsilon''_r(x, y, \omega)$ , a seconda che sia positiva o negativa, stabilisce se il mezzo è assorbente o amplificante.

Risolvere l'equazione del rotore-rotore (3.7), con assegnate le relative condizioni al contorno, significa determinare i modi che si possono propagare nella struttura data, individuandone la pulsazione  $\omega$  (o, equivalentemente, il numero d'onda  $k_0 = \omega/c$ , autovalore del problema) e l'andamento del campo

$\bar{\Phi}$  in funzione dello spazio (autovettore del problema) su tutto il dominio  $\Omega$ .

Il campo magnetico  $\bar{H}(x, y)$  calcolato, è utilizzato per ricavare il corrispondente campo elettrico  $\bar{E}(x, y)$  dalle equazioni di *Maxwell* ed inoltre, dal *teorema di Poynting*, si ottiene il profilo dell'intensità normalizzata  $\psi(x, y)$ , per una guida d'onda o una fibra monomodale si ha:

$$P = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\bar{E}(x, y) \times \bar{H}^*(x, y)) \cdot \hat{n} dx dy \quad (3.14)$$

dove  $P$  è la potenza del modo ed  $\hat{n}$  è il versore normale alla superficie del dominio  $\Omega$ . L'intensità normalizzata deriva dalla normalizzazione della componente lungo  $z$  del *vettore di Poynting*:

$$\psi(x, y) = \frac{\bar{E}(x, y) \times \bar{H}^*(x, y) \cdot \hat{n}}{2P} \quad (3.15)$$

In questo modo il profilo di intensità è normalizzato, infatti dalla (3.14) si ha:

$$\int_{\Omega} \psi(x, y) dx dy = 1 \quad (3.16)$$

Una volta che sono localmente note le intensità normalizzate  $\psi_p(x, y)$  e  $\psi_s(x, y)$  per la lunghezza d'onda della pompa e del segnale, si possono ricavare, su ogni punto del dominio  $\Omega$ , le frequenze di transizione che compaiono nelle *population rate equations*, descritte nel paragrafo successivo. Intuitivamente: conoscendo la distribuzione della concentrazione del drogante  $N_T(x, y)$  e la distribuzione dell'intensità della pompa e del segnale si è in grado di valutare la bontà dell'amplificatore. Infatti maggiore è la sovrapposizione delle due distribuzioni, quindi l'intensità è presente dove c'è drogante e viceversa, tanto maggiore è l'efficienza dell'amplificatore analizzato.

### 3.2 Le *population rate equations*

La necessità di realizzare amplificatori sempre più efficienti su guide d'onda o fibre ottiche dalle dimensioni sempre più contenute (ottica integrata), porta allo studio di sistemi costituiti da vetri fortemente drogati [Des94], [Fed95], [Bli95]. I livelli di concentrazione impiegabili sono limitati da fenomeni di *clustering*; ad elevate concentrazioni, gli ioni attivi tendono ad avvicinarsi gli uni agli altri e a raggrupparsi in maniera dipendente dalla temperatura e quindi dal processo di fabbricazione. Ne consegue che, essendo prossimi spazialmente, interagiscono mediante scambi di energia non radiativi, con inevitabili riduzioni dell'efficienza di pompaggio e dei guadagni disponibili negli amplificatori. Il fenomeno più interessante e che influenza maggiormente le prestazioni è detto *up-conversion* e può avvenire tra due ioni che si trovano entrambi in uno stato eccitato. Uno dei due, detto donatore, trasferisce in modo non radiativo parte della propria energia all'altro, detto accettore. Tale trasferimento di energia fa sì che il donatore passi ad un livello energetico inferiore e l'accettore ad uno superiore. Nel caso di ioni d'erbio, riferendosi alla figura 3.2, il meccanismo di *up-conversion* più probabile è relativo agli ioni che si trovano nello stato eccitato  ${}^4I_{13/2}$ . Il fenomeno di *up-conversion* fa sì che il donatore passi allo stato fondamentale  ${}^4I_{15/2}$  e l'accettore allo stato eccitato  ${}^4I_{9/2}$ , dal quale poi decade spontaneamente ed in modo non radiativo al livello di pompa  ${}^4I_{11/2}$ . L'effetto è l'abbassamento del grado di inversione della popolazione che si riesce ad ottenere lungo tutto l'amplificatore, con conseguente diminuzione delle prestazioni.

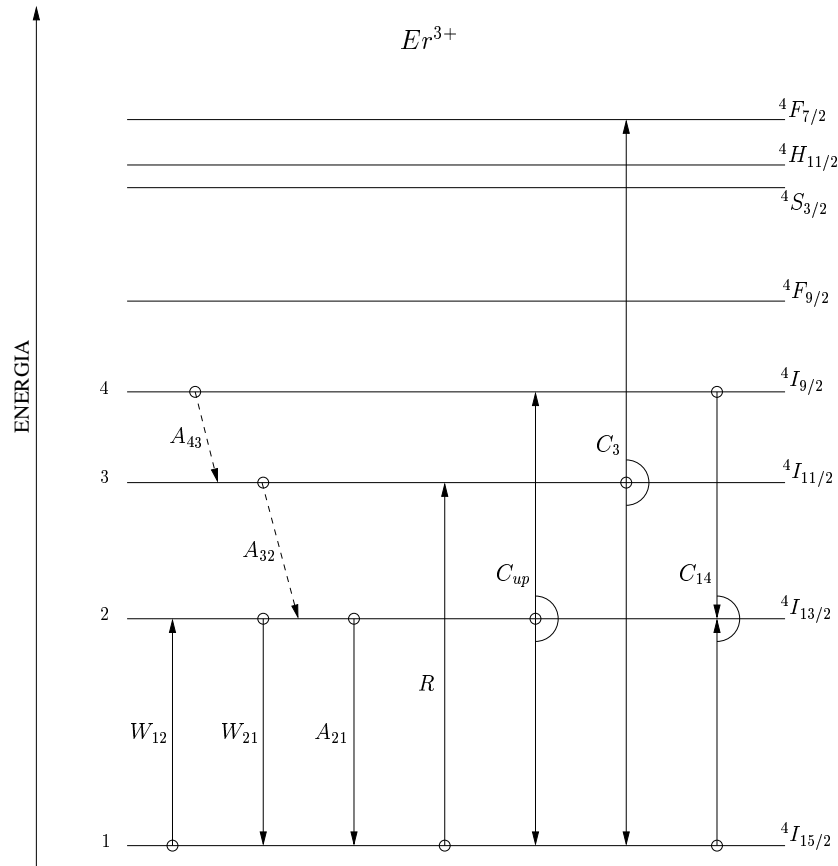
Esiste un altro fenomeno che si contrappone al precedente: la cosiddetta *cross-relaxation* [Des94]. In questo caso l'energia è trasferita in modo non radiativo da uno ione donatore che si trova in uno stato energetico eccita-

to, promuovendo in tal modo l'accettore ad uno stato energetico più alto. Negli ioni d'erbio, riferendosi ancora alla figura 3.2, il caso più interessante è quello in cui inizialmente lo ione accettore è nello stato energetico fondamentale  ${}^4I_{15/2}$ . Dopo il trasferimento di energia da parte dello ione donatore, che si trova allo stato energetico  ${}^4I_{9/2}$ , i due ioni si trovano entrambi allo stato energetico metastabile  ${}^4I_{13/2}$ , aumentando l'inversione di popolazione. Tuttavia la probabilità del fenomeno di *cross-relaxation* è legata alla dimensione della popolazione dei due stati energetici  ${}^4I_{15/2}$  e  ${}^4I_{9/2}$ , i quali a seguito del pompaggio sono quasi svuotati, rendendo l'evento molto meno probabile dell'*up-conversion*.

Esistono due differenti meccanismi responsabili dell'*up-conversion*: *up-conversion* uniforme e l'*up-conversion* dovuta a *clustering*. Mentre la prima, dovuta a fenomeni di interazione fra ioni uniformemente distribuiti nel mezzo, è caratterizzata da un decadimento lento (dell'ordine di *ms*), la seconda, dovuta a *clustering*, cioè alla formazione di coppie di ioni separati gli uni dagli altri da distanze inferiori a circa  $0.5\text{ nm}$ , caratterizzata da un decadimento rapido (dell'ordine di  $\mu\text{s}$ ). In pratica entrambi i meccanismi sono presenti contemporaneamente. L'impiego, tuttavia, di co-droganti come l'alluminio e il fosforo consentono di ridurre i fenomeni di *clustering* e quindi di aumentare le concentrazioni di terre rare utilizzabili. Il fenomeno di *up-conversion* uniforme, invece, costituisce il problema principale nella realizzazione di amplificatori in guide d'onda o fibre drogate con erbio. Esso infatti dipende esclusivamente dalla distanza fra ioni, di conseguenza, i suoi effetti negativi sulle prestazioni dei dispositivi, non possono essere ridotti utilizzando co-droganti come l'alluminio. È tuttavia possibile apportare miglioramenti utilizzando ioni itterbio come co-drogante, i quali enfatizzano il fenomeno di *cross-relaxation*, migliorando l'inversione di popolazione del sistema [DiP93]



[DiP01].



**Figura 3.2:** Livelli energetici di interesse dello ione  $Er^{3+}$ , con indicate le frequenze di transizione stimolate ( $W_{12}$ ,  $W_{21}$  ed  $R$ ), spontanee ( $A_{21}$ ,  $A_{32}$  ed  $A_{43}$ ), dovute ai fenomeni di *cross-relaxation* ( $C_{14}$ ) e di *up-conversion*, sia dal livello metastabile che dal livello di pompa ( $C_{up}$  e  $C_3$ ).

Il modello che si utilizza tiene conto degli effetti di interazione fra ioni introducendo termini non lineari nelle equazioni di bilancio delle popolazioni. Facendo riferimento alla figura 3.2, si indicano con  $N_T$  la densità di popolazione totale del sistema, cioè il numero di atomi di erbio per unità di volume [ioni/ $m^3$ ]; con  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  ed  $N_4$  le densità di popolazione rispettivamente

dei livelli energetici  ${}^4I_{15/2}$ ,  ${}^4I_{13/2}$ ,  ${}^4I_{11/2}$  ed  ${}^4I_{9/2}$  dello ione erbio. Si suppone trascurabile la popolazione al livello  ${}^4I_{7/2}$ . Assumendo che il sistema sia pompato a 980 nm e tenendo conto dei fenomeni di *up-conversion* sia dal livello energetico metastabile  ${}^4I_{13/2}$  che dal livello energetico di pompa  ${}^4I_{11/2}$ , é possibile scrivere il seguente sistema di equazioni di bilancio, le *population rate equations* per il sistema a 4 livelli [Zob94], [DiP93]:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial t} = -W_{12}N_1 - RN_1 + A_{21}N_2 + W_{21}N_2 + C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 + C_3N_3^2 \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} = W_{12}N_1 - A_{21}N_2 - W_{21}N_2 + A_{32}N_3 - 2C_{up}N_2^2 + 2C_{14}N_1N_4 \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} = RN_1 - A_{32}N_3 + A_{43}N_4 - 2C_3N_3^2 \\ \frac{\partial N_4}{\partial t} = C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 - A_{43}N_4 + C_3N_3^2 \end{cases} \quad (3.17)$$

dove  $W_{12}$ ,  $W_{21}$  ed  $R$  sono le frequenze di transizione stimulate dal segnale e dalla pompa;  $A_{21}$  è la frequenza di transizione spontanea;  $A_{32}$  ed  $A_{43}$  sono le frequenze di transizione non radiative e  $C_{up}$ ,  $C_3$  e  $C_{14}$  sono i coefficienti di *up-conversion* e di *cross-relaxation*. Le frequenze di transizione hanno la dimensione dell'inverso del tempo ( $[1/sec]$ ). È interessante notare che i fenomeni di interazione fra ioni sono descritti da termini quadratici, dimensionalmente rappresentati da  $[m^3/sec]$ . É stata inoltre trascurata la frequenza di transizione  $W_{31}$  relativa all'emissione stimolata dalla pompa, in quanto molto piccola rispetto al termine  $R$  relativo all'assorbimento della pompa stessa. Le equazioni di bilancio vengono risolte in regime stazionario, annullando le

derivate rispetto al tempo:

$$\begin{cases} 0 = -W_{12}N_1 - RN_1 + A_{21}N_2 + W_{21}N_2 + C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 + C_3N_3^2 \\ 0 = W_{12}N_1 - A_{21}N_2 - W_{21}N_2 + A_{32}N_3 - 2C_{up}N_2^2 + 2C_{14}N_1N_4 \\ 0 = RN_1 - A_{32}N_3 + A_{43}N_4 - 2C_3N_3^2 \\ 0 = C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 - A_{43}N_4 + C_3N_3^2 \end{cases} \quad (3.18)$$

ed introducendo la legge di conservazione, secondo cui la somma delle popolazioni dei singoli livelli energetici deve essere uguale al numero totale di ioni d'erbio, supposta costante lungo la coordinata di propagazione  $z$ :

$$N_1(x, y, z) + N_2(x, y, z) + N_3(x, y, z) + N_4(x, y, z) = N_T(x, y) \quad (3.19)$$

Essendo il sistema non lineare e non risolvibile analiticamente, si è fatto ricorso a metodi di risoluzione numerica, descritti nella sezione 4.4.

Rimangono da esprimere le frequenze di transizione che compaiono nelle *population rate equations* (3.17). I termini legati all'assorbimento e all'emissione stimolate, a differenza di quelli spontanei, dipendono dall'intensità del campo elettromagnetico incidente [DiP93]. La frequenza di transizione  $W_{12}$  associata all'assorbimento è espressa dalla:

$$\begin{aligned} W_{12}(x, y) &= \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\sigma_{12}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, \nu_s^i) + \\ &+ \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{12}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, \nu^j)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

analogamente la frequenza di transizione  $W_{21}$  associata all'emissione stimo-

lata si scrive:

$$\begin{aligned}
W_{21}(x, y) &= \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\sigma_{21}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, \nu_s^i) + \\
&+ \sum_{j=1}^M \frac{\sigma_{21}^j(\nu^j)}{h\nu^j} (I_{ASE+}^j(x, y, \nu^j) + I_{ASE-}^j(x, y, \nu^j)) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

relativamente alle transizioni dovute alla pompa si scrive:

$$R(x, y) = \frac{\sigma_{13}(\nu_p)}{h\nu_p} (I_{p+}(x, y, \nu_p) + I_{p-}(x, y, \nu_p)) \quad (3.22)$$

dove è stata considerata la propagazione di  $N_s$  segnali, operanti a diverse frequenze;  $M$  è il numero di slot di frequenza, di larghezza arbitraria  $\Delta\nu^j$ , centrati alla frequenza  $\nu^j$ , con cui si divide l'intera banda di interesse, per modellare il rumore *ASE*;  $h$  è la costante di *Plank*;  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{12}$  e  $\sigma_{13}$  sono le *cross sections* di emissione ed assorbimento; mentre  $I_s^i$ ,  $I_{p\pm}$  ed  $I_{ASE\pm}$  rispettivamente rappresentano le intensità del segnale  $i$ -esimo, della pompa (copropagante e contropropagante) e del rumore *ASE* (copropagante e contropropagante). Le frequenze di transizione stimulate  $W_{12}$  e  $W_{21}$  in generale possiedono contributi derivanti dall'intero spettro. Tuttavia per le guide d'onda e le fibre "corte" che si stanno considerando, il rumore *ASE* può essere trascurato nelle espressioni delle transizioni stimulate (3.20) e (3.21), che quindi diventano:

$$W_{12}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{12}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, \nu_s^i) \quad (3.23)$$

$$W_{21}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\sigma_{21}^i(\nu_s^i)}{h\nu_s^i} I_s^i(x, y, \nu_s^i) \quad (3.24)$$

Come già accennato, le frequenze di emissione spontanee non dipendono dall'intensità del campo elettromagnetico incidente e sono espresse come l'inverso del tempo di vita medio di uno ione d'erbio ad un determinato stato energetico eccitato. In particolare l'emissione spontanea tra i livelli energetici  ${}^4I_{13/2}$  e  ${}^4I_{15/2}$  è radiativa, cioè l'energia liberata dalla transizione genera un fotone:

$$A_{21} = \frac{1}{\tau_{21}} \quad (3.25)$$

mentre le transizioni tra i livelli energetici  ${}^4I_{11/2}$  e  ${}^4I_{13/2}$  e tra  ${}^4I_{9/2}$  e  ${}^4I_{11/2}$  sono non radiative, quindi l'energia liberata non genera fotoni ma genera fononi:

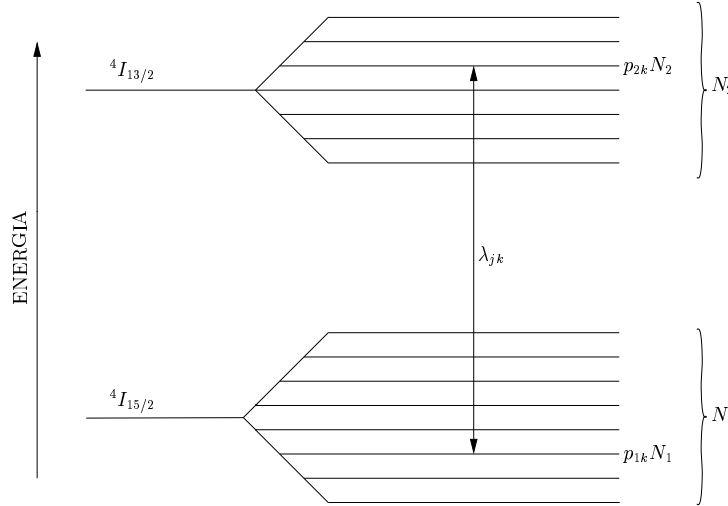
$$A_{32} = \frac{1}{\tau_{32}} \quad (3.26)$$

$$A_{43} = \frac{1}{\tau_{43}} \quad (3.27)$$

### 3.3 Caratterizzazione delle *cross sections*

In un atomo immerso in un mezzo rarefatto, che non interagisce con altri atomi, i livelli di energia permessi sono gli autovalori dell'equazione di *Schroedinger*. Nel caso degli amplificatori in fibra drogata, gli atomi d'erbio interagiscono con gli atomi del vetro ospite ed eventualmente, in presenza di alte concentrazioni del drogante, con altri atomi d'erbio. Queste interazioni provocano una separazione dei singoli livelli in sottolivelli, separati da piccoli salti energetici, [Sve89]. Ci sono due diversi tipi di allargamento: l'allargamento omogeneo, che coinvolge nella medesima misura tutti gli atomi

e l'allargamento disomogeneo, che coinvolge in maniera diversa, aleatoria, ciascun atomo.



**Figura 3.3:** Diagramma schematico dei livelli energetici  ${}^4I_{15/2}$  e  ${}^4I_{13/2}$  allargati in più sottolivelli. Ogni possibile transizione energetica tra due generici sottolivelli  $2k \leftrightarrow 1j$  è proporzionale alla lunghezza d'onda  $\lambda_{jk}$ .

Facendo riferimento alla figura 3.3, le *cross sections* di assorbimento ed emissione, possono essere determinate considerando ogni singola transizione tra i sottolivelli allargati dei due livelli  ${}^4I_{15/2}$  e  ${}^4I_{13/2}$ , pesata dalla probabilità  $p_{lm}$  dell'elettrone di trovarsi al sottolivello energetico di partenza [Des90], espressa dalla statistica di *Boltzmann*:

$$p_{lm} = \frac{e^{-E_{lm}/K_B T}}{\sum_{m=1}^{g_l} e^{-E_{lm}/K_B T}} \quad (3.28)$$

dove  $E_{lm}$  rappresenta l'energia dell'atomo che si trova nell' $m$ -esimo sottolivello dell' $l$ -esimo livello;  $g_l$  è il numero di sottolivelli energetici in cui si allarga la riga,  $K_B$  è la costante di *Boltzmann* e  $T$  è la temperatura assoluta. Al-

l'equilibrio termico, considerando un numero di sottolivelli  $g_1$  e  $g_2$  dei livelli energetici  ${}^4I_{15/2}$  e  ${}^4I_{13/2}$ , le *cross sections* di assorbimento ed emissione sono quindi espresse dalle seguenti sommatorie:

$$\sigma_{as}(\omega) = \sum_{k=1}^{g_2} \sum_{j=1}^{g_1} \sigma_{jk}(\omega) p_{1j} \quad (3.29)$$

$$\sigma_{em}(\omega) = \sum_{k=1}^{g_2} \sum_{j=1}^{g_1} \sigma_{kj}(\omega) p_{2k} \quad (3.30)$$

dove  $\sigma_{jk}$  e  $\sigma_{kj}$  sono le *cross sections* associate alle transizioni di un atomo dallo stato energetico  $j$ -esimo del livello 1, allo stato  $k$ -esimo del livello 2 e viceversa. Non è tuttavia possibile realizzare misure di intensità spettrale associate ad una singola transizione, ed inoltre la posizione dei sottolivelli energetici non è ben determinabile, compromettendo la definizione delle probabilità  $p_{lm}$  di *Boltzmann* (3.28), perciò non è possibile determinare le *cross sections* tramite questa strada. Si possono al più integrare la (3.29) e la (3.30) su tutto lo spettro da analizzare; si arriva alle equazioni di *Ladenburg-Fuchtbauer* già citate nella sezione 1.4, scritte ora in funzione della frequenza  $\nu$ , [Bja93]:

$$\sigma_{as}(\nu) = \frac{\langle \lambda_s^2 \rangle_{as}}{8\pi n^2 \tau} \frac{I_{as}(\nu)}{\int I_{as}(\nu) d\nu} \quad (3.31)$$

$$\sigma_{em}(\nu) = \frac{\langle \lambda_s^2 \rangle_{em}}{8\pi n^2 \tau} \frac{I_{em}(\nu)}{\int I_{em}(\nu) d\nu} \quad (3.32)$$

dove  $I_{as}$  e  $I_{em}$  sono le intensità spettrali di assorbimento e di fluorescenza,  $n$  è l'indice di rifrazione,  $\tau$  è il tempo di vita medio del livello, metastabile  ${}^4I_{13/2}$ , mentre  $\langle \lambda_s^2 \rangle_{as}$  e  $\langle \lambda_s^2 \rangle_{em}$  sono le lunghezze d'onda rispettivamente di assorbimento e di fluorescenza mediate su tutte le possibili transizioni tra

i livelli energetici  ${}^4I_{15/2}$  e  ${}^4I_{13/2}$ . Questi ultimi parametri, proprio per la difficoltà di valutare la posizione dei sottolivelli energetici, sono difficili da ottenere. Solitamente una buona stima è rappresentata dalle lunghezze d'onda dei picchi di assorbimento e di fluorescenza. Le intensità spettrali  $I_{as}$  ed  $I_{em}$  sono invece di facile misurazione; tramite le relazioni (3.31) e (3.32) si possono quindi calcolare i valori delle *cross sections*. Questa tecnica, anche se fornisce stime molto approssimate, è spesso utilizzata sia perchè è di semplice implementazione, sia perchè non esistono tecniche di misurazione che forniscano risultati precisi.

Le relazioni esposte si dimostrano con la teoria semiclassica della matrice di densità [Des94], secondo cui la suscettività atomica complessa totale in un sistema con i livelli energetici allargati è data dalla somma di tutte le suscettività corrispondenti ad ogni singola transizione. Per cui si può scrivere:

$$\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) - j\chi''(\lambda) \quad (3.33)$$

$$\chi(\lambda) = \sum_{k=1}^{g_2} \sum_{j=1}^{g_1} \chi_{jk}(\lambda) \quad (3.34)$$

Un altro importante risultato della teoria della matrice di densità consiste nel fatto che, in caso di allargamento omogeneo delle righe, il profilo delle *cross sections*  $\sigma_{jk}$  relative alle singole transizioni segue l'andamento di *lorentziane* con larghezza di linea  $\Delta\lambda$  omogenea (costante), centrate alla lunghezza d'onda  $\lambda_{jk}$  della transizione  $2k \leftrightarrow 1j$ , con valore di picco  $\sigma_{jk}^{peak}$ . Infatti per un sistema ad allargamento omogeneo la suscettività complessa è data da:



[Zha97]:

$$\chi_{jk}^O(\lambda) = \frac{n_{eff}\lambda}{2\pi} (\sigma_{jk}^{peak} p_{2k} N_2 - \sigma_{jk}^{peak} p_{1j} N_1) \frac{2 \left( \frac{\lambda_{jk} - \lambda}{\Delta\lambda} \right) + j}{1 + 4 \left( \frac{\lambda_{jk} - \lambda}{\Delta\lambda} \right)^2 + \beta_{jk}} \quad (3.35)$$

dove  $\beta_{jk}$  è un parametro relativo alla saturazione, che diventa importante quando la potenza  $P_s$  del segnale è confrontabile con la potenza  $P_p$  della pompa; mentre  $N_1$  ed  $N_2$  sono le popolazioni totali rispettivamente al livello energetico  ${}^4I_{15/2}$  e  ${}^4I_{13/2}$ . In particolare,  $\beta_{jk}$  ha la seguente espressione [Des90]:

$$\beta_{jk} = \frac{P_s(z) \sigma_{jk}^{peak} \tau_{jk}}{h\nu_s A(1 + R\tau)} \quad (3.36)$$

dove  $h$  è la costante di *Planck*,  $\nu_s$  è la frequenza del segnale,  $A$  è una opportuna area efficace,  $\tau_{jk} \equiv A_{2k \rightarrow 1j}^{-1}$  sono i tempi di vita associati alle emissioni spontanee individuali tra i due sottolivelli  $2k \rightarrow 1j$ , mentre  $R$  è la frequenza di transizione tra i livelli energetici  ${}^4I_{15/2}$  e  ${}^4I_{11/2}$ , dovuta alla pompa. In questa analisi vengono considerate potenze  $P_s$  di segnale molto piccole in ingresso all'amplificatore, è pertanto possibile trascurare  $\beta_{jk}$ , ritenendolo nullo.

Ora si considera il caso in cui la variazione da punto a punto della posizione dei sottolivelli energetici non è trascurabile: si parla di allargamento disomogeneo. Rispetto all'espressione della suscettività relativa all'allargamento omogeneo in questo caso ciò che varia sono le lunghezze d'onda in cui sono centrate le *lorentziane* e la loro larghezza. Si suppone che la funzione di densità di probabilità delle posizioni delle lunghezze d'onda  $\lambda_{jk}$  centrali sia

modellata come una funzione di densità di probabilità *gaussiana*,  $P_{no}(\lambda')$ :

$$P_{no}(\lambda') = \sqrt{\frac{4 \ln(2)}{\pi \Delta \lambda'^2}} \exp \left[ -4 \ln(2) \left( \frac{\lambda'}{\Delta \lambda'} \right)^2 \right] \quad (3.37)$$

dove  $\Delta \lambda'$  è la larghezza di linea disomogenea. L'espressione della suscettività complessa relativa alla transizione tra il sottolivello superiore  $2k$  ed il sottolivello inferiore  $1j$ , tenendo conto sia degli effetti dell'allargamento omogeneo che degli effetti dell'allargamento disomogeneo, ma trascurando invece gli effetti della saturazione, è la seguente:

$$\begin{aligned} \chi_{jk}^{NO}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_{no}(\lambda - \lambda') \chi_{jk}^O(\lambda') d\lambda' = \\ &= \frac{n_{eff} \lambda}{2\pi} (\sigma_{jk}^{peak} p_{2k} N_2 - \sigma_{jk}^{peak} p_{1j} N_1) \sqrt{\frac{4 \ln(2)}{\pi \Delta \lambda'^2}} \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left[ -4 \ln(2) \left( \frac{\lambda' - \lambda_{jk}}{\Delta \lambda'} \right)^2 \right] \left[ 2 \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\Delta \lambda} \right) + j \right]}{1 + 4 \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\Delta \lambda} \right)^2} d\lambda' \end{aligned} \quad (3.38)$$

Utilizzando le espressioni (3.33) e (3.34) insieme alla (3.38), si ottengono le parti reale e immaginaria della suscettività complessa totale associata alla transizione tra i livelli fondamentali  ${}^4I_{13/2}$  e  ${}^4I_{15/2}$ :

$$\begin{aligned} \chi'(\lambda) &= \sum_{k=1}^{g_2} \sum_{j=1}^{g_1} \frac{n_{eff} \lambda}{\pi} (\sigma_{jk}^{peak} p_{2k} N_2 - \sigma_{jk}^{peak} p_{1j} N_1) \sqrt{\frac{4 \ln(2)}{\pi \Delta \lambda'^2}} \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left[ -4 \ln(2) \left( \frac{\lambda' - \lambda_{jk}}{\Delta \lambda'} \right)^2 \right] \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\Delta \lambda} \right)}{1 + 4 \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\Delta \lambda} \right)^2} d\lambda' \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\chi''(\lambda) = - \sum_{k=1}^{g_2} \sum_{j=1}^{g_1} \frac{n_{eff} \lambda}{2\pi} (\sigma_{jk}^{peak} p_{2k} N_2 - \sigma_{jk}^{peak} p_{1j} N_1) \sqrt{\frac{4 \ln(2)}{\pi \Delta \lambda'^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left[ -4 \ln(2) \left( \frac{\lambda' - \lambda_{jk}}{\Delta \lambda'} \right)^2 \right]}{1 + 4 \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\Delta \lambda} \right)^2} d\lambda' \quad (3.40)$$

Sappiamo da [Des94], che la parte immaginaria della suscettibilità complessa si può esprimere attraverso la seguente relazione:

$$\chi''(\lambda) = - \frac{n_{eff} \lambda}{2\pi} [\sigma_{em}(\lambda) N_2 - \sigma_{as}(\lambda) N_1] \quad (3.41)$$

Usando la (3.40) e la (3.41) si possono esprimere le *cross sections* in questo modo:

$$\sigma_{as}(\lambda) = \sum_{k=1}^{g_2} \sum_{j=1}^{g_1} \sigma_{jk}^{peak} p_{1j} \sqrt{\frac{4 \ln(2)}{\pi \Delta \lambda'^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left[ -4 \ln(2) \left( \frac{\lambda' - \lambda_{jk}}{\Delta \lambda'} \right)^2 \right]}{1 + 4 \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\Delta \lambda} \right)^2} d\lambda' \quad (3.42)$$

$$\sigma_{em}(\lambda) = \sum_{k=1}^{g_2} \sum_{j=1}^{g_1} \sigma_{jk}^{peak} p_{2k} \sqrt{\frac{4 \ln(2)}{\pi \Delta \lambda'^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left[ -4 \ln(2) \left( \frac{\lambda' - \lambda_{jk}}{\Delta \lambda'} \right)^2 \right]}{1 + 4 \left( \frac{\lambda' - \lambda}{\Delta \lambda} \right)^2} d\lambda' \quad (3.43)$$

dove il valore di picco  $\sigma_{jk}^{peak}$  è dato da:

$$\sigma_{jk}^{peak} = \frac{\lambda_{jk}^4}{4\pi^2 n_{eff}^2 c \tau_{jk} \Delta \lambda} \quad (3.44)$$

Tramite le (3.42) e (3.43) si sono espresse le *cross sections* come sovrapposizione dei contributi dovuti alle singole transizioni. Gli integrali che

compaiono nella (3.42) e nella (3.43) sono chiamati profili di *Voigt*. Essi hanno l'andamento che rispecchia la convoluzione tra il profilo *lorentziano* dovuto all'allargamento omogeneo delle righe e il profilo *gaussiano* dovuto all'allargamento disomogeneo.

La determinazione della posizione dei sottolivelli energetici, così come la funzione di densità di probabilità  $P_{no}(\lambda')$  per l'allargamento disomogeneo delle righe, sono difficili da ottenere con misure spettroscopiche. La convergenza di un algoritmo di approssimazione di una curva, invece, ha una soluzione che in generale non è unica. È quindi possibile, avendo ottenuto le *cross sections* tramite altri metodi, attuare un'approssimazione dei loro andamenti tramite una serie di funzioni che non necessariamente corrispondono ai profili reali delle singole transizioni [Des94]. In questo modo si ha a disposizione una forma analitica per rappresentare *cross sections* che in alcuni casi può risultare molto comoda. In particolare, utilizzando una serie di *lorentziane*, è possibile determinare in modo agevole le espressioni della parte reale e della parte immaginaria della suscettività dovuta alla presenza del drogante nella fibra. Infatti, mentre per la parte immaginaria esiste un'espressione che utilizza direttamente dei valori delle *cross sections*, per la parte reale si deve ricorrere alle relazioni integrali di *Kramers-Kronig*. Si parte dall'espressione (3.41) scritta in funzione della pulsazione  $\omega$ ,

$$\chi''(\omega) = -\frac{n_{effc}}{\omega} [\sigma_{em}(\omega)N_2 - \sigma_{as}(\omega)N_1] \quad (3.45)$$

con le *cross sections* espresse tramite una somma di *lorentziane* il cui generico termine viene indicato con  $\mathcal{L}_i(\omega)$ :

$$\mathcal{L}_i(\omega) = a_i \left[ 1 + 4 \left( \frac{\omega - \omega_i}{\Delta\omega_i} \right)^2 \right] \quad (3.46)$$

per cui:

$$\sigma_{as/em}(\omega) = \sigma_{as/em}^{peak} \sum_{i/j=1}^{N_{as}/N_{em}} \mathcal{L}_{i/j}^{as/em}(\omega) \quad (3.47)$$

dove  $N_{as}$  ed  $N_{em}$  sono il numero di *lorentziane* utilizzate per approssimare rispettivamente la *cross sections* di assorbimento e la *cross sections* di emissione. La relazione che intercorre fra la parte reale e la parte immaginaria della suscettività complessa è descritta attraverso le relazioni di *Kramers-Kronig*:

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = \\ &= -\frac{n_{eff}c}{\omega} \left[ N_2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{em}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - N_1 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{as}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Le *cross sections* che compaiono nella (3.48) sono una sovrapposizione lineare di  $N$  *lorentziane*, quindi gli integrali della (3.48) si possono considerare come la sovrapposizione di  $N$  trasformazioni di *lorentziane* tramite le relazioni di *Kramers-Kronig*, che hanno la seguente espressione:

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{L}_i(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 2 \frac{\omega - \omega_i}{\Delta\omega_i} \mathcal{L}_i(\omega) \quad (3.49)$$

Utilizzando il metodo delle approssimazioni delle *cross sections* tramite una sovrapposizione di *lorentziane* è perciò possibile scrivere le espressioni della parte reale e della parte immaginaria della suscettività complessa. Infatti dalle (3.45), (3.48) e (3.49) si ha:

$$\chi'(\omega) = \frac{2n_{eff}c}{\omega} \left[ N_2 \sigma_{em}^{peak} \sum_{i=1}^{N_{em}} \mathcal{L}_i^{em}(\omega) \frac{\omega - \omega_i^{em}}{\Delta\omega_i^{em}} - N_1 \sigma_{as}^{peak} \sum_{i=1}^{N_{as}} \mathcal{L}_i^{as}(\omega) \frac{\omega - \omega_i^{as}}{\Delta\omega_i^{as}} \right] \quad (3.50)$$

$$-\chi''(\omega) = \frac{n_{eff}c}{\omega} \left[ N_2 \sigma_{em}^{peak} \sum_{i=1}^{N_{em}} \mathcal{L}_i^{em}(\omega) - N_1 \sigma_{as}^{peak} \sum_{i=1}^{N_{as}} \mathcal{L}_i^{as}(\omega) \right] \quad (3.51)$$

Vale la pena puntualizzare che in realtà la suscettività complessa (quindi le sue componenti reale e immaginaria) è funzione non solo di  $\omega$ , ma anche delle coordinate  $(x, y)$  della sezione trasversa della guida d'onda o della fibra; in termini matematici:

$$\chi = \chi(x, y, \omega) = \chi'(x, y, \omega) - j\chi''(x, y, \omega) \quad (3.52)$$

Le espressioni (3.50) e (3.51) sono proprio le espressioni utilizzate per ricavare i valori della suscettività complessa sulla sezione trasversa della guida d'onda o della fibra (nel *VFEM* significa ricavare la suscettività complessa su ogni nodo della *mesh*); dove è necessario ricordare che  $n_{eff}$  è l'indice di rifrazione efficace della guida d'onda o della fibra non drogate, data da:

$$n_{eff} = \frac{\Im\{\gamma\}}{k_0} = \frac{\beta}{k_0} \quad (3.53)$$

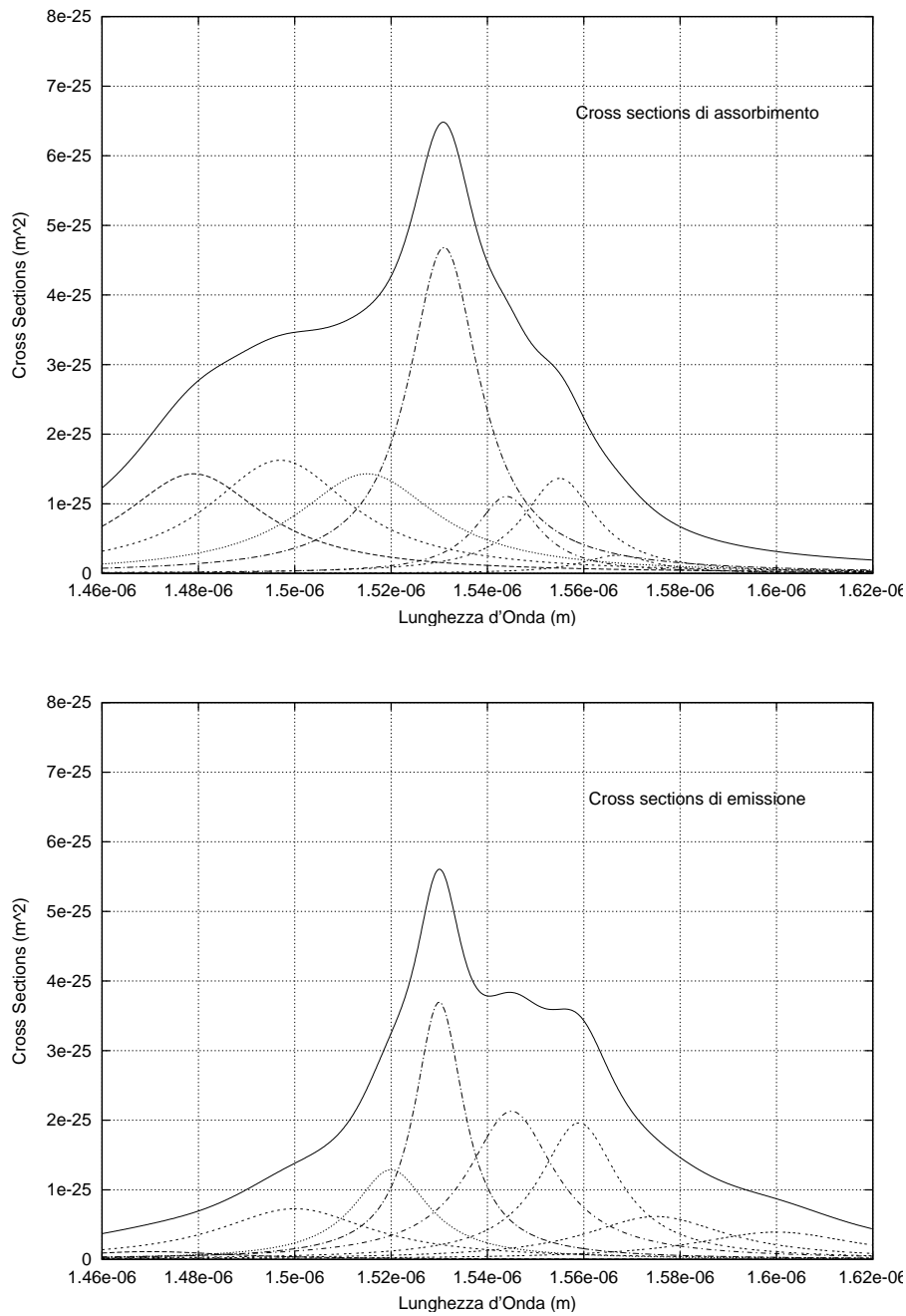
con  $k_0 = \omega/c$  numero d'onda.

Nella tabella 3.1 sono riportati due insiemi di *lorentziane*, tratte da [Des94], che approssimano le *cross sections* di assorbimento e di emissione rispettivamente con 7 e 8 curve. I parametri sono forniti in funzione delle lunghezze d'onda  $\lambda$ , in particolare  $a_i^{as/em}$  sono le ampiezze,  $\lambda_i^{as/em} = 2\pi c/\omega_i^{as/em}$  sono le lunghezze d'onda su cui sono centrate le curve e  $\Delta\lambda_i^{as/em} = (\lambda_i^{as/em})^2 \Delta\omega_i^{as/em}/c$  sono le larghezze delle *lorentziane*, con  $i = 1, \dots, N$ . È da notare che questi due insiemi di *lorentziane* non sono unici e rappresentano solo un'opportuna approssimazione degli andamenti delle *cross sections* ottenuti sperimentalmente. Per semplicità, la somma  $\sum_i \mathcal{L}_i(\lambda)$  delle  $N$  funzioni è realizzata per

Numero	Assorbimento			Emissione		
	Ampiezza	Centro	Larghezza	Ampiezza	Centro	Larghezza
$i$	$a_i^{as}$	$\lambda_i^{as}(nm)$	$\Delta\lambda_i^{as}(nm)$	$a_i^{em}$	$\lambda_i^{em}(nm)$	$\Delta\lambda_i^{em}(nm)$
1	0.22	1479	36	0.02	1470	42
2	0.25	1497	36.5	0.13	1500	39
3	0.22	1515	35.5	0.23	1520	19
4	0.72	1531	18	0.66	1530	12.5
5	0.17	1544	16	0.38	1545	22
6	0.21	1555	18.5	0.35	1559	20
7	0.04	1567	18	0.11	1575	36
8	–	–	–	0.07	1600	42

**Tabella 3.1:** Parametri delle *lorentziane*, 7 e 8, rispettivamente utilizzate per l'approssimazione delle *cross sections* di assorbimento e di emissione. Le due serie sono normalizzate all'unità.

fornire un valore di picco unitario per ciascuna *cross sections*. Il risultato della somma deve quindi essere moltiplicato per un valore di picco ottenuto sperimentalmente. In figura 3.4 sono mostrati gli andamenti delle *cross sections* di assorbimento e di emissione ottenute dalla somma delle *lorentziane* della tabella 3.1, moltiplicate rispettivamente per i valori di picco  $\sigma_{as}^{peak} = 6.5 \times 10^{-25} m^2$  e  $\sigma_{em}^{peak} = 5.6 \times 10^{-25} m^2$ .



**Figura 3.4:** Andamenti delle *cross sections* di assorbimento e di emissione ottenuti con la serie di *lorenziane* con i parametri mostrati in tabella 3.1, con valori di picco rispettivamente uguali a  $\sigma_{as}^{peak} = 6.5 \times 10^{-25} \text{ m}^2$  e  $\sigma_{em}^{peak} = 5.6 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ .





# Capitolo 4

## Il progetto del simulatore

Lo scopo di questo capitolo è descrivere le caratteristiche e il funzionamento del processore progettato: il simulatore per gli amplificatori ottici basato sul solutore modale, descritto nel capitolo 3. Innanzitutto è stato chiamato EDH15AMPLI ed è stato implementato in FORTRAN [Cha00], che mette a disposizione numerose librerie matematiche per i calcoli matriciali ed algebrici. Il software per realizzare la simulazione dell'amplificatore ottico esegue sequenzialmente le tre seguenti operazioni:

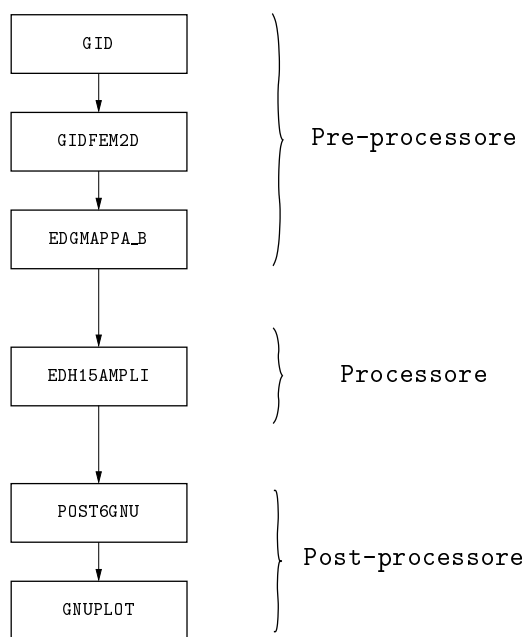
- pre-processore
- processore
- post-processore

In questo lavoro di tesi è stato implementato il processore, mentre sono stati utilizzati un pre-processore e un post-processore preesistenti.

Il pre-processore utilizzato è l'applicativo GID che permette di definire le caratteristiche geometriche e fisiche della struttura da analizzare, generando

inoltre la *mesh* necessaria per sviluppare l'analisi modale tramite il *FEM*. Poichè *GID* non fornisce in uscita i files compatibili con il processore progettato, si utilizzano i programmi *GIDFEM2D*, che genera i files *tabelle.dat*, *estremi.dat* e *tensori.dat* che contengono le caratteristiche geometriche e fisiche del problema che si vuole studiare e *EDGMAPPA\_B* che esegue la mappatura dei cosiddetti *edge elements*, che verranno discussi più avanti, generando il file *edgmappa.dat*.

I files di uscita dal processore contengono i valori della suscettività complessa  $\chi_{Er}(x, y)$  e delle popolazioni dei livelli stabile e metastabile  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$ , sui punti della *mesh*, in un formato leggibile dal post-processore *POST6GNU*, in modo che, tramite *GNUPLOT*, possano esserene visualizzati gli andamenti su tutto il dominio  $\Omega$  in cui è stata studiata la struttura.

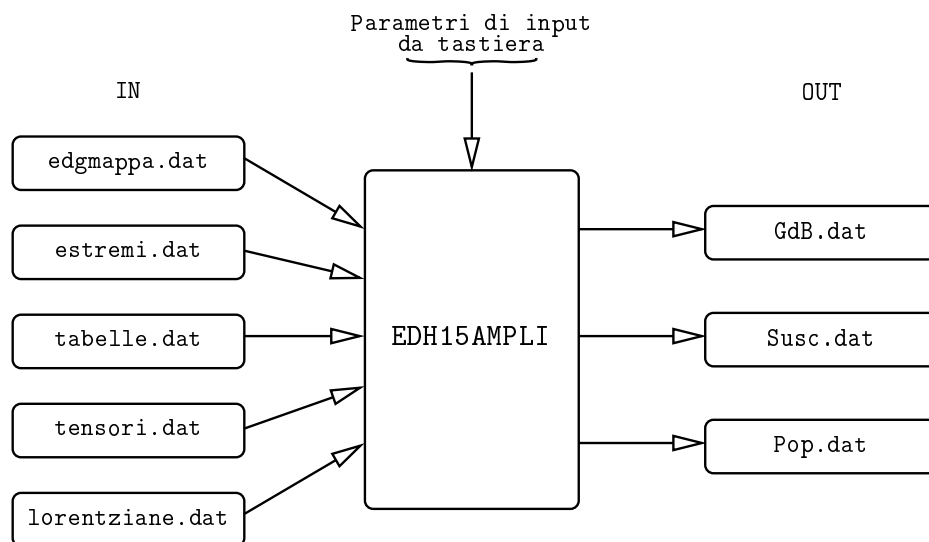


**Figura 4.1:** Schema a blocchi rappresentante il software del simulatore per l'amplificatore ottico basato sul solutore modale.

## 4.1 La struttura di EDH15AMPLI

Si è detto che per implementare il modello  $z$ -invariante per l'amplificatore ottico è necessario il solutore modale complesso. Quest'ultimo esistendo già, basato sul *FEM*, realizzato in FORTRAN, è stato adattato ed utilizzato nella realizzazione del programma in questione. In particolare al solutore modale, che fornisce la costante di propagazione complessa  $\gamma$  e l'andamento del campo magnetico  $\overline{H}(x, y)$  sul dominio  $\Omega$ , è stato incorporato il calcolo del profilo dell'intensità normalizzata  $\psi(x, y)$ , la caratterizzazione delle *cross sections*, l'impostazione e la risoluzione delle *propagation rate equations*, il calcolo della suscettività complessa  $\chi_{Er}(x, y)$  e quindi la determinazione del guadagno  $G_{dB}$ , così come si è visto nel capitolo 3.

La figura 4.2 mostra come è stata strutturata la sezione di *input/output* del programma EDH15AMPLI.



**Figura 4.2:** Schema descrittivo dei files di input e output del simulatore per l'amplificatore ottico EDH15AMPLI.

***Files di ingresso***

*edgmappa.dat*: contiene le informazioni sulla posizione degli elementi non nulli all'interno delle matrici sparse del problema algebrico.

*estremi.dat*: contiene gli estremi del dominio  $\Omega$  su cui è studiata la struttura.

*tabelle.dat*: contiene le informazioni geometriche sugli elementi triangolari e sui nodi della *mesh*.

*tensori.dat*: contiene le informazioni sulle caratteristiche fisiche della struttura, cioè il tensore di permittività assoluta  $\bar{\epsilon}$ , per ogni elemento triangolare.

***Parametri di input da tastiera***

*Relativi ai segnali*: numero di canali da processare e corrispondenti lunghezze d'onda e potenze iniziali.

*Relativi alla pompa*: lunghezza d'onda, potenza e *cross sections* di assorbimento relativa alla sua lunghezza d'onda.

*Relativi all'amplificatore*: lunghezza dell'amplificatore, geometria della zona drogata, profilo di concentrazione del drogante, coefficienti di transizione spontanea e se si considera il fenomeno di *up-conversion*, i relativi coefficienti.

*Relativi al solutore modale*: parametri di regolazione delle librerie utilizzate e traslazioni delle finestre di calcolo degli autovalori di segnali e pompa.

***Files di uscita***

**GdB.dat**: contiene i valori di guadagno  $G_{dB}$  dei segnali processati, calcolati in decibel.

**Susc.dat**: contiene i valori della suscettività complessa  $\chi_{Er}(x, y)$  dovuta alla presenza dell'erbio, calcolati su ogni nodo della *mesh*.

**Pop.dat**: contiene i valori delle popolazioni  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$ , calcolati su ogni nodo della *mesh*.

Il *FEM* prevede la suddivisione del dominio  $\Omega$ , in sottodomini triangolari  $\Omega_e$  detti appunto elementi finiti ed ogni elemento è contraddistinto da un certo numero di punti (nodi): tutte le grandezze in gioco con dipendenza spaziale  $(x, y)$  sono riferite agli elementi triangolari o ai punti della *mesh*. Il programma EDH15AMPLI innanzitutto legge i files di ingresso, in seguito determina le *cross sections* corrispondenti alla lunghezza d'onda di ogni canale come si vedrà nella sezione 4.2. I tensori diagonali di permittività elettrica, definiti sugli elementi triangolari, sono letti nel file **tensori.dat**. Questi sono reali, è quindi necessario convertirli in tensori complessi; inoltre, dalla permittività assoluta  $\bar{\bar{\epsilon}}$  si passa alla permittività relativa  $\bar{\bar{\epsilon}}_r = \bar{\bar{\epsilon}}/\epsilon_0$ . In questo modo le caratteristiche fisiche del mezzo drogato con erbio, dalle relazioni (3.12) e (3.13), sono espresse dai tensori diagonali  $\bar{\bar{\epsilon}}_r$  i cui termini non nulli sono le quantità complesse:

$$\varepsilon_r(x, y) = \varepsilon_r'(x, y) - j\varepsilon_r''(x, y) = n^2(x, y) + \chi_{Er}'(x, y) - j\chi_{Er}''(x, y) \quad (4.1)$$

con  $(x, y) \in \Omega_e$  per  $e = 1, 2, \dots, NT \rightarrow$  numero di elementi triangolari.

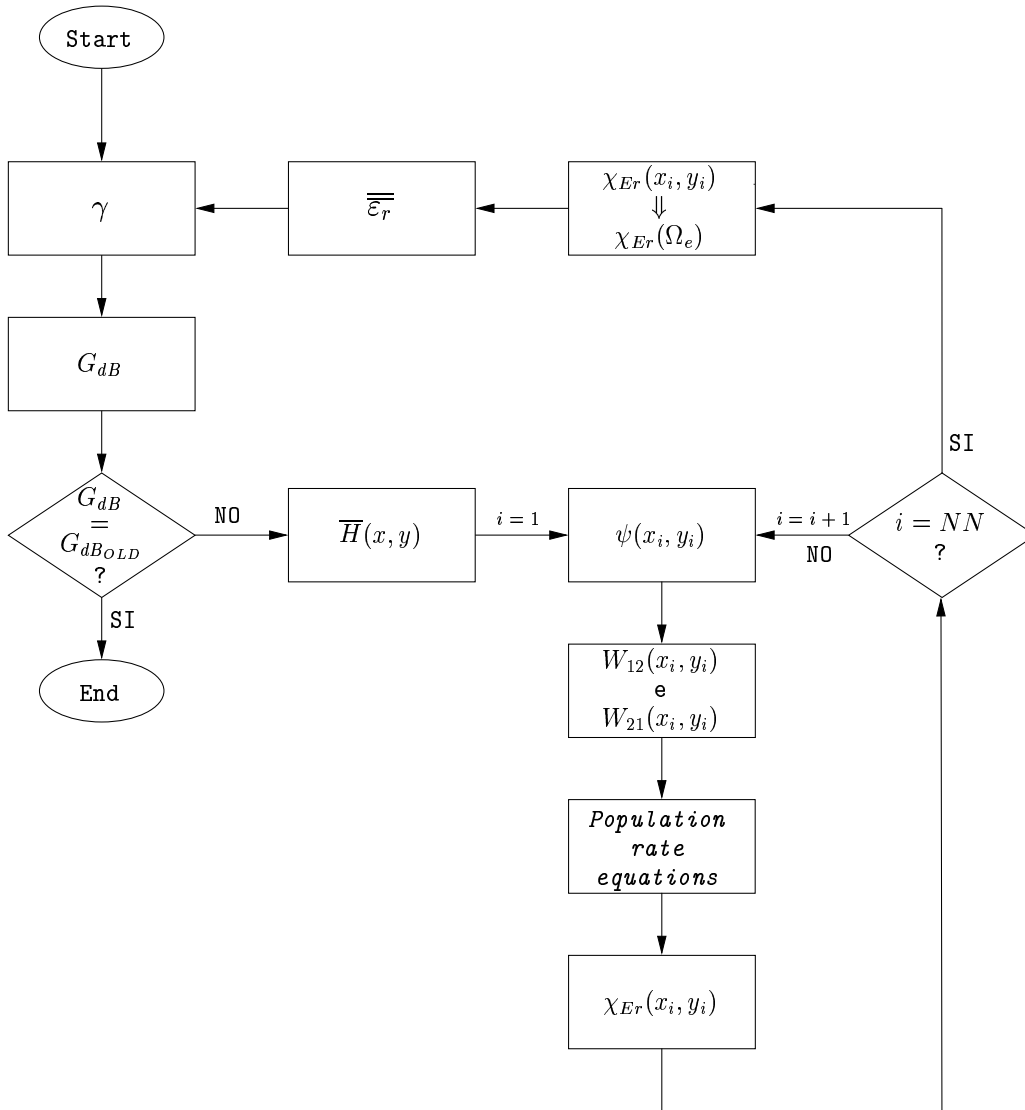
Successivamente EDH15AMPLI calcola, attraverso il solutore modale basato sul *FEM*, la distribuzione del campo per la lunghezza d'onda della pompa, quindi calcola il profilo dell'intensità normalizzata, in modo da poter ricavare dalla (3.22) i valori del *rate* di assorbimento della pompa  $R(x_i, y_i)$ , su tutti i punti della *mesh* nel dominio  $\Omega$  (dove  $(x_i, y_i)$  sono le coordinate del nodo  $i$ -esimo, con  $i = 1, 2, \dots, NN \rightarrow$  numero di nodi).

A questo punto iniziano le iterazioni sulle lunghezze d'onda dei segnali: EDH15AMPLI è costituito da un *loop* esterno, che processa, in sequenza, un canale alla volta e da un *loop* interno che prolunga l'iterazione sulla lunghezza d'onda dell' $n$ -esimo canale finchè ottiene la convergenza sul valore del guadagno  $G_{dB}$ , come schematizzato in figura 4.3. In particolare, per quel che riguarda quest'ultimo *loop*, così come per la pompa, EDH15AMPLI ricava la distribuzione del campo sulla struttura; inoltre, attraverso la parte reale della costante di propagazione complessa  $\gamma$  del modo trovato, dalla (3.5), ricava il valore del guadagno  $G_{dB}$  sul segnale. Confronta il valore corrente di  $G_{dB}$  con quello ottenuto l'iterazione precedente\*, se coincidono a meno di una piccola tolleranza, allora considera conclusa l'iterazione e passa a processare il canale successivo.

Altrimenti, se non viene ottenuta la convergenza, EDH15AMPLI compie un ciclo per tutti i punti della *mesh*; sul generico nodo  $i$ -esimo, calcola l'intensità normalizzata  $\psi(x_i, y_i)$  e con quest'ultima ricava dalle (3.23) e (3.24) i valori delle frequenze di transizione stimulate  $W_{12}(x_i, y_i)$  e  $W_{21}(x_i, y_i)$ . A questo punto imposta e risolve le *population rate equations* (3.18), nel modo che verrà spiegato nella sezione 4.4. Dalle equazioni (3.50) e (3.51), calcola i valori reali ed immaginari della suscettività complessa  $\chi'_{Er}(x_i, y_i)$  e

---

\*Ovviamente se l'iterazione corrente è la prima, il confronto è privo di significato, pertanto non viene realizzato.



**Figura 4.3:** Diagramma di flusso rappresentante i passi realizzati nel *loop* per il calcolo del guadagno  $G_{dB}$  dell'amplificatore.

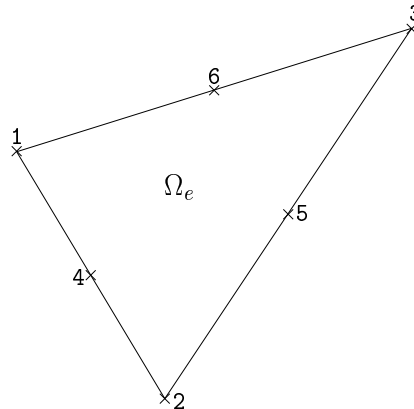
$\chi''_{Er}(x_i, y_i)$ . In pratica, alla fine del ciclo realizzato per tutti i punti della *mesh*, EDH15AMPLI ha a disposizione il profilo di  $\chi_{Er}(x_i, y_i)$  sull'intero dominio  $\Omega$  della struttura. Prima di iniziare l'iterazione successiva aggiorna i tensori della permittività elettrica relativa  $\bar{\bar{\epsilon}}_r$  come indicato nella (4.1). Sorge un problema: infatti i tensori  $\bar{\bar{\epsilon}}_r$  sono definiti su ogni elemento triangolare



$\Omega_e$ , mentre la suscettività complessa  $\chi_{Er}(x_i, y_i)$  viene ricavata su ogni nodo di coordinate  $(x_i, y_i)$ , con  $i = 1, 2, \dots, NN$ . Per risolverlo, EDH15AMPLI, fa la media, su ogni triangolo  $\Omega_e$ , di tutti i valori di  $\chi_{Er}(x_i, y_i)$  calcolati sui nodi appartenenti a quel triangolo. Considerando la *mesh* formata da elementi del secondo ordine, cioè con 6 nodi per ogni elemento triangolare, come in figura 4.4, il valore della suscettività complessa calcolata sul generico elemento  $\Omega_e$  è dato da:

$$\chi_{Er}(\Omega_e) = \sum_{i=1}^6 \frac{\chi_{Er}(x_i, y_i)}{6} \quad \text{con } (x_i, y_i) \in \Omega_e \quad (4.2)$$

la quale può essere utilizzata nell'equazione (4.1), per poi passare all'iterazione successiva.



**Figura 4.4:** Generico elemento triangolare  $\Omega_e$  del secondo ordine, con indicata la numerazione locale dei nodi.

Si è detto che il parametro per il controllo sulla convergenza è il valore del guadagno  $G_{dB}$ . Questa scelta è diversa dal criterio adottato in [Her99], dove il controllo sulla convergenza è eseguito attraverso i valori della suscettività

complessa. La realizzazione di questo controllo utilizzando direttamente i valori di guadagno, permette di evitare, nell'ultima iterazione, il calcolo del campo e di tutto ciò che ne consegue. Infatti,  $G_{dB}$ , è deducibile dalla costante di propagazione complessa  $\gamma$ , quindi solamente dall'autovalore del problema studiato. In pratica, nell'ultima iterazione, si evita di eseguire il ciclo per ogni punto della *mesh*. In questo modo si ottiene un notevole risparmio in termini di tempo di simulazione, in modo particolare se la *mesh* della struttura studiata è particolarmente fitta.

## 4.2 Determinazione delle *cross sections*

EDH15AMPLI determina le *cross sections* di assorbimento e di emissione tramite una serie di *lorentziane*:

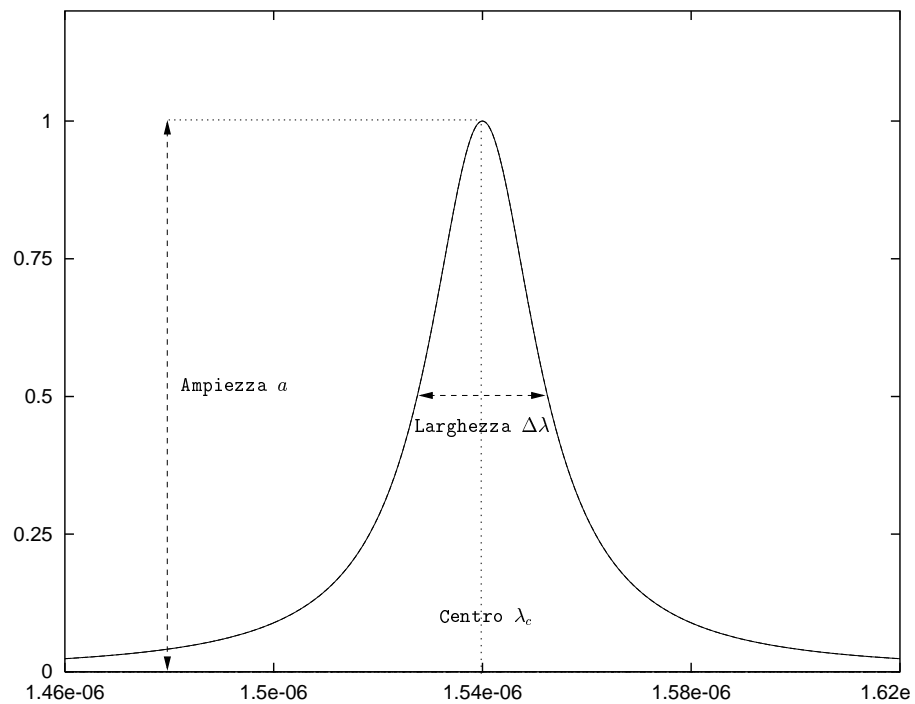
$$\sigma_{as/em}(\lambda) = \sigma_{as/em}^{peak} \sum_{i/j=1}^{Nas/Nem} \mathcal{L}_{i/j}^{as/em}(\lambda) \quad (4.3)$$

come indicato nella sezione 3.3, leggendo i parametri contenuti nel file di ingresso `lorentziane.dat`. Per la precisione, per ogni lunghezza d'onda  $\lambda$ , è necessario ricavare sia i valori effettivi delle *cross sections*  $\sigma_{as}(\lambda)$  e  $\sigma_{em}(\lambda)$ , dalle (3.46) e (3.47), per il calcolo della parte immaginaria della suscettività complessa (3.51), sia i valori delle quantità espresse nella (3.50) per il calcolo della parte reale di  $\chi_{Er}$ . Se ci sono più canali d'ingresso, è necessario che i quattro suddetti valori siano determinati per ognuna delle lunghezze d'onda  $\lambda$  dei canali.

Oltre al numero di *lorentziane* e ai relativi parametri di ognuna di queste (ampiezza  $a_i$ , centro  $\lambda_i$  e larghezza  $\Delta\lambda_i$ ), in `lorentziane.dat` sono indicati i valori di picco delle *cross sections*  $\sigma^{peak}$ . Per rendere più flessibile la loro

modellizzazione, EDH15AMPLI normalizza automaticamente il punto massimo delle sommatorie delle *lorentziane* ai valori di picco indicati nel file. In questo modo è possibile variare indipendentemente ogni parametro  $a_i$ ,  $\lambda_i$  oppure  $\Delta\lambda_i$  dell' $i$ -esima *lorentziana*  $\mathcal{L}_i$ , alterando il picco della sommatoria  $\sum_i \mathcal{L}_i$ , senza tuttavia alterare il picco della *cross sections* data dalla sommatoria  $\sigma^{peak} \sum_i \mathcal{L}_i$ .

Una *lorentziana* (figura 4.5) ha la forma di una campana la cui larghezza  $\Delta\lambda$  è definita come la distanza tra le ascisse in cui la funzione assume metà del suo valore massimo.



**Figura 4.5:** Esempio di funzione *lorentziana*:  $\mathcal{L}(\lambda) = a[1 + 4(\lambda - \lambda_c)^2/(\Delta\lambda)^2]^{-1}$ , con ampiezza  $a = 1$ , lunghezza d'onda centrale  $\lambda_c = 1.54 \mu m$ , larghezza  $\Delta\lambda = 25 nm$ .

## 4.3 Il metodo degli elementi finiti

Si è già accennato che il metodo degli elementi finiti prevede la suddivisione del dominio  $\Omega$ , sul quale si vuole ricavare il profilo del campo elettromagnetico, in un numero finito di elementi  $\Omega_e$ . Il problema elettromagnetico studiato è bidimensionale, quindi discretizzare il dominio, significa creare un reticolo, chiamato *mesh*, sulla sezione della guida d'onda o della fibra, formato da tanti triangoli adiacenti, non sovrapposti.

Il *FEM* approssima la funzione incognita interpolandola, attraverso particolari funzioni dette “funzioni di forma”, su ogni singolo sottodominio  $\Omega_e$ . Partendo dal problema differenziale alle derivate parziali descritto nella sezione 3.1, espresso dall'equazione del rotore-rotore (3.7), ricordata qui sotto:

$$\bar{\nabla} \times (\bar{\rho} \bar{\nabla} \times \bar{\Phi}) - k_0^2 \bar{q} \bar{\Phi} = 0 \quad (4.4)$$

applicando il *FEM*, si ottiene un problema algebrico descritto dall'equazione matriciale:

$$[A]\{\Phi\} = \left(\frac{\gamma}{k_0}\right)^2 [B]\{\Phi\} \quad (4.5)$$

dove le matrici  $[A]$  e  $[B]$  sono matrici sparse di dimensione  $NP \times NP$ , con  $NP$  numero totale di nodi della *mesh*. Perciò il problema si riconduce alla ricerca di una soluzione algebrica approssimata dell'equazione (4.5), ottenuta attraverso operazioni matriciali.

La funzione incognita, ad esempio  $\bar{H}(x, y)$ , viene pertanto espressa su ogni singolo elemento finito  $\Omega_e$ , in funzione delle funzioni di forma, indicate

con  $M_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned} H_x(x, y) &= \sum_{i=1}^K h_{xi} M_i(x, y) \\ H_y(x, y) &= \sum_{i=1}^K h_{yi} M_i(x, y) \\ H_z(x, y) &= \sum_{i=1}^K h_{zi} M_i(x, y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

I coefficienti incogniti  $h_{xi}$ ,  $h_{yi}$  e  $h_{zi}$ , rappresentano le componenti del campo magnetico su ognuno dei punti nodali della *mesh*. Il numero di nodi che contraddistinguono ogni elemento finito  $\Omega_e$  è determinato dall'ordine delle funzioni di forma. Il solutore utilizzato in EDH15AMPLI fa uso di funzioni di forma  $M_i(x, y)$  del secondo ordine, individuando 6 nodi per ogni triangolo della *mesh*.

Alcune soluzioni dell'equazione di partenza del rotore-rotore (4.4) non sono soluzione delle equazioni di *Maxwell* e sono dette “modi spuri” [Bul01]. La presenza di soluzioni prive di significato fisico, che possono soddisfare le condizioni del problema generale, accanto ai modi che sono effettivamente in grado di propagarsi, è provocata sia dalle condizioni al contorno, sia dall'equazione differenziale (disaccoppiando le equazioni del primo ordine di *Maxwell*, nell'equazione del secondo ordine del rotore-rotore, si aumentano il numero di soluzioni). Per eliminare i modi spuri dalla regione di interesse (dove  $\beta/k_0 \geq n_2$ , con  $n_2$  indice di rifrazione del *cladding*), è possibile introdurre, insieme ad appropriate condizioni al contorno, un sistema chiamato metodo della funzione di penalità. Il solutore utilizzato in EDH15AMPLI, invece, fa uso di un metodo più efficiente, basato sull'impiego di particolari funzioni di forma, gli *edge elements*, che permettono di eliminare i modi spuri

senza l'ausilio della funzione di penalità.

Le funzioni di forma  $M_i(x, y)$  non rappresentano una base completa per le distribuzioni dei campi elettromagnetici, quindi le soluzioni sono approssimate; tuttavia maggiore è il numero di elementi  $NT$  con cui si divide il dominio  $\Omega$  (*mesh* più fitta), maggiore è l'accuratezza delle soluzioni.

Il metodo degli elementi finiti è utilizzato anche per ricavare le intensità normalizzate. Si ricordi l'equazione (3.15); avendo risolto il problema elettromagnetico nei termini del campo magnetico  $\overline{H}(x, y)$ , dall'equazioni di *Maxwell* si ricava il corrispondente campo elettrico  $\overline{E}(x, y)$ :

$$\overline{E}(x, y) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \overline{\nabla} \times \overline{H}(x, y) \quad (4.7)$$

perciò l'intensità normalizzata  $\psi(x, y)$  si può scrivere come:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{\overline{\nabla} \times \overline{H}(x, y) \times \overline{H}^*(x, y)}{2P} \quad (4.8)$$

Attraverso il *FEM*, la precedente equazione diventa una sommatoria, per ogni singolo elemento triangolare  $\Omega_e$ , di termini del tipo:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \sum_{i=1}^6 h_{xi} \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \sum_{j=1}^6 h_{xj} N_j(x, y) = \\ & = \sum_{i=1}^6 h_{xi} \sum_{j=1}^6 h_{xj} \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} N_j(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (4.9)$$

dove  $N_i(x, y)$  sono le funzioni di forma esresse in forma locale.

## 4.4 Utilizzo della subroutine NS02AD

La subroutine NS02AD [Har90], contenuta nelle librerie della *Harwell*, permette di risolvere i sistemi di equazioni non lineari in funzione di variabili in doppia precisione:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

In particolare alla subroutine deve essere fornito, oltre al sistema da risolvere, anche la matrice *Jacobiana* [ $n \times n$ ] delle derivate parziali di ogni funzione  $f_i$  rispetto le variabili incognite  $x_i$ :

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

L'uso della subroutine prevede di chiamare ripetutamente NS02AD sotto il controllo di un parametro, IFLAG.

In questa sezione verrà mostrato come l'NS02AD è stata utilizzata per risolvere, su ogni nodo della *mesh*, le *population rate equations* del sistema a quattro livelli in regime stazionario, visto nella sezione 3.2, che è qui riportato:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -(W_{12} + R)N_1 + (A_{21} + W_{21})N_2 + C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 + C_3N_3^2 \\ 0 = W_{12}N_1 - (A_{21} + W_{21})N_2 + A_{32}N_3 - 2C_{up}N_2^2 + 2C_{14}N_1N_4 \\ 0 = RN_1 - A_{32}N_3 + A_{43}N_4 - 2C_3N_3^2 \\ 0 = C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 - A_{43}N_4 + C_3N_3^2 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Innanzitutto c'è da notare che le quattro equazioni (4.12) non sono linearmente indipendenti (ognuna delle equazioni è data dalla somma delle altre

tre), perciò il sistema ammette infinite soluzioni. Per ottenere la soluzione unica si introduce la condizione di normalizzazione già vista (3.19):

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = N_T \quad (4.13)$$

Sostituendo la (4.13) nella terza equazione delle (4.12) si ottiene un sistema composto da quattro equazioni non lineari, linearmente indipendenti, nelle quattro incognite, costituite dai livelli di popolazione  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  ed  $N_4$ :

$$\begin{cases} 0 = -(W_{12} + R)N_1 + (A_{21} + W_{21})N_2 + C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 + C_3N_3^2 \\ 0 = W_{12}N_1 - (A_{21} + W_{21})N_2 + A_{32}N_3 - 2C_{up}N_2^2 + 2C_{14}N_1N_4 \\ 0 = RN_2 - (R + A_{32})N_3 - (R - A_{43})N_4 - 2C_3N_3^2 + RN_T \\ 0 = C_{up}N_2^2 - C_{14}N_1N_4 - A_{43}N_4 + C_3N_3^2 \end{cases} \quad (4.14)$$

La matrice *Jacobiana* associata è la seguente:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -W_{12}-R-C_{14}N_4 & A_{21}+W_{21}+2C_{up}N_2 & 2C_3N_3 & -C_{14}N_1 \\ W_{12}+C_{14}N_4 & -A_{21}-W_{21}-4C_{up}N_2 & A_{32} & C_{14}N_1 \\ R & 0 & -A_{32}-4C_3N_3 & A_{43} \\ -C_{14}N_4 & 2C_{up}N_2 & 2C_3N_3 & -C_{14}N_1-A_{43} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Quando viene chiamata la subroutine NSO2AD, è necessario che l'utilizzatore fornisca i parametri adeguati; in particolare il programma EDH15AMPLI chiama la subroutine nel seguente modo:

```
CALL NSO2AD(4,N,F,DMAX,ACC,DG,DV,G,V,DNORM,RNORM,IFLAG)
```

dove:

4 è il numero di variabili incognite del sistema.



- N** è un array in `DOUBLE PRECISION` di lunghezza 4, dove in ingresso `EDH15AMPLI` introduce una stima della soluzione  $N_1, N_2, N_3, N_4$  ed in uscita fornisce l'approssimazione corrente della soluzione stessa. In prima approssimazione i valori di **N** vengono settati ad  $N_T/4$ .
- F** è un array in `DOUBLE PRECISION` di lunghezza 4, dove `EDH15AMPLI` e `NS02AD` introducono, sia in ingresso che in uscita, i valori di ogni singola *population rate equation*, calcolati sui valori correnti di  $N_1, N_2, N_3, N_4$ , contenuti in **N**.
- DMAX** è una variabile in `DOUBLE PRECISION` con cui l'utilizzatore sovrastima la distanza  $\|\mathbf{n}_0 - \mathbf{n}\|_2^\dagger$  tra il vettore soluzione **n** e la sua approssimazione iniziale  $\mathbf{n}_0$ , con  $\mathbf{n} = (N(1), N(2), N(3), N(4)) = (N_1, N_2, N_3, N_4)$ . `EDH15AMPLI` setta questo parametro a  $DMAX = N_T$ .
- ACC** è una variabile in `DOUBLE PRECISION` che deve essere settata dall'utilizzatore per richiedere l'accuratezza desiderata:  $\|\mathbf{f}\|_2 \leq ACC$ , con  $\mathbf{f} = (F(1), F(2), F(3), F(4))$ . `EDH15AMPLI` setta questo parametro ad  $ACC = 100 \times N_T$ .
- DG, DV, G, V** sono arrays in `DOUBLE PRECISION` lunghezza 4; `EDH15AMPLI` varia il loro contenuto solo se `IFLAG = 2` o `3`, mentre `NS02AD` altera solamente `DG, DV` e `G`, ma non `V`.
- DNORM** è una variabile in `DOUBLE PRECISION` che non deve essere settata dall'utilizzatore. Essa rappresenta un limite alla variazione del vettore **N**, contenente le incognite, tra due passi successivi.
- RNORM** è una variabile in `DOUBLE PRECISION`, come **DNORM** non deve essere settata dall'utilizzatore. Il suo ruolo sarà riferito nella successiva

---

<sup>†</sup>La norma di un vettore è definita come  $\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$ .

descrizione di IFLAG.

IFLAG è una variabile in INTEGER, settata inizialmente da EDH15AMPLI al valore 1, in seguito l'utilizzatore non deve più alterarla. Tramite IFLAG, NSO2AD comunica a EDH15AMPLI cosa deve fare. Se  $IFLAG = 0$  significa che in N sono stati caricati dei valori che soddisfano l'accuratezza richiesta sulla soluzione: l'iterazione può ritenersi conclusa positivamente. Un valore negativo di ritorno dalla chiamata di NSO2AD, invece indica che si è verificato un errore, oppure l'accuratezza richiesta non è raggiungibile. Ad un valore positivo di IFLAG, si ha che EDH15AMPLI realizza i seguenti calcoli:

IFLAG = 1 oppure IFLAG = 4:

l'array F viene caricato con i valori che assumono le *population rate equations* sostituendo i valori correnti di  $N_1, N_2, N_3, N_4$  contenuti nell'array N.

IFLAG = 2 oppure IFLAG = 3:

- a) calcola la matrice *Jacobiana*  $\mathbf{J}$  nel punto N.
- b) carica nell'array G il vettore  $\mathbf{g}$  definito da  $\mathbf{g} = -\mathbf{J}^T \mathbf{f}$ .
- c) carica nell'array DG il vettore  $\mathbf{Jg}$ .
- d) carica nell'array V la soluzione  $\mathbf{v}$  del sistema  $\mathbf{Jv} = -\mathbf{f}$ . soddisfacendo alle due condizioni  $\|\mathbf{f} + \mathbf{Jv}\|_2 \leq \text{RNORM}$  e  $\|\mathbf{v}\|_2 \leq \text{DNORM}$ .
- e) carica nell'array DV il vettore  $\mathbf{Jv}$ .

Come è consigliato nel manuale della *Harwell* [Har90], all'interno di EDH15AMPLI, il calcolo del vettore  $\mathbf{v}$ , dall'equazione  $\mathbf{Jv} = -\mathbf{f}$ , è stato implementato per via analitica. In particolare, trattandosi di un sistema lineare, è stato risolto

sfruttando la regola di *Cramer* [Ser89].

I parametri che entrano in gioco nelle *population rate equations* (4.14) sono fortemente variabili, sia tra due diverse simulazioni, che all'interno della stessa simulazione. Infatti  $W_{12}$ ,  $W_{21}$  ed  $R$  dipendono dall'intensità normalizzata  $\psi(x, y)$ , calcolata nel punto generico  $(x_i, y_i)$  della *mesh*, questa può variare sensibilmente tra un punto ben confinato all'interno del *core*, dove è presente parecchia potenza di pompa, e un punto più esterno, dove la potenza di pompa è meno confinata.  $W_{12}$ ,  $W_{21}$  ed  $R$ , inoltre, dipendono dalle *cross sections* di assorbimento ed emissione, quindi dalla lunghezza d'onda del segnale considerato. La concentrazione stessa del drogante,  $N_T$ , compare nelle (4.14): lo studio degli amplificatori ottici richiede la possibilità di realizzare analisi per valori di questo parametro variabili tra due o tre ordini di grandezza. In più, se si considerano guide d'onda o fibre ottiche con profili di concentrazione del core di tipo  $\alpha \rightarrow N_T(r) = N_0(1 - (r/r_{Er})^\alpha)$ , all'interno della zona drogata ci sono grandi variazioni di concentrazione tra i punti centrali e i punti più esterni. Il solutore delle *population rate equations* (4.14) deve perciò essere robusto, non può quindi essere ottimizzato per alcuni casi, se in altre situazioni genera soluzioni troppo approssimate o addirittura errori.

Gli errori più frequenti sono quelli dovuti all'eccessiva richiesta di accuratezza nella soluzione (**IFLAG** = -1); in questo caso è necessario aumentare il parametro **ACC**. Un altro errore frequente si ha quando il parametro **DMAX** è troppo piccolo: il vettore **f** non converge a 0 entro i limiti assegnati (**IFLAG** = -3). Per risolvere tali problemi, in entrambi i casi è stato innalzato il valore del parametro corrispondente, stando attenti a mantenere comunque un'accuratezza sulle soluzioni accettabile. Questo compromesso ha portato ad assegnare ai parametri di tolleranza in questione, i seguenti valori, già

esposti sopra:

$$\text{ACC} = 100 \times N_T, \quad \text{DMAX} = N_T$$

Un altro parametro importantissimo, che l'utilizzatore della subroutine NS02AD deve impostare, è il massimo numero di iterazioni che è possibile realizzare. Infatti, è pur vero che consentendo un numero maggiore di iterazioni (chiamate a NS02AD), si ottengono in genere risultati più accurati, ma è anche vero che si aumenta notevolmente la complessità computazionale e quindi i tempi di esecuzione. Perciò, dovendo risolvere le *population rate equations* (4.14) su ogni nodo della *mesh*, anche in questo caso è stato un compromesso a portare ad un numero massimo di iterazioni di 1000. Ovviamente è possibile che una soluzione termini le chiamate ad NS02AD a sua disposizione senza aver raggiunto l'accuratezza richiesta; tuttavia si nota che già dopo poche iterazioni le soluzioni sono vicine alle corrispondenti soluzioni definitive: sicuramente hanno lo stesso ordine di grandezza e alcune delle cifre più significative coincidono.

L'effetto della variazione sul valore del parametro ACC, per un sistema di *population rate equations* (4.14) campione, è mostrato in tabella 4.1. Si nota che con  $\text{ACC} = N_T/10$ , NS02AD non riesce a convergere con l'accuratezza desiderata ( $\text{IFLAG} = -1$ ); tuttavia le soluzioni sono pressochè coincidenti, almeno per quel che riguarda le due popolazioni principali,  $N_1$  ed  $N_2$ . La tabella 4.2, invece mostra l'influenza che il numero di iterazioni ha sulle soluzioni. Ovviamente il sistema considerato è tale da non convergere alla soluzione dopo poche iterazioni, come nell'esempio precedente. Anche variando il numero di iterazioni eseguite, le soluzioni sono quasi coincidenti; l'unica eccezione si ha quando NS02AD viene chiamata solamente 10 volte: la

	ACC			
	$N_T/10$	$N_T$	$10 \times N_T$	$100 \times N_T$
IFLAG finale	-1	0	0	0
Num. iterazioni	129	77	65	53
$N_1$ [ioni/m <sup>3</sup> ]	$7.56181789 \cdot 10^{25}$	$7.56181787 \cdot 10^{25}$	$7.56181787 \cdot 10^{25}$	$7.56181787 \cdot 10^{25}$
$N_2$ [ioni/m <sup>3</sup> ]	$3.24362879 \cdot 10^{26}$	$3.24362878 \cdot 10^{26}$	$3.24362878 \cdot 10^{26}$	$3.24362878 \cdot 10^{26}$
$N_3$ [ioni/m <sup>3</sup> ]	$1.05538935 \cdot 10^{22}$	$1.05540113 \cdot 10^{22}$	$1.05535614 \cdot 10^{22}$	$1.05721028 \cdot 10^{22}$
$N_4$ [ioni/m <sup>3</sup> ]	$5.26047598 \cdot 10^{21}$	$5.26055554 \cdot 10^{21}$	$5.26291104 \cdot 10^{21}$	$5.26228577 \cdot 10^{21}$

**Tabella 4.1:** Soluzioni delle *population rate equations*, ottenute con la subroutine della *Harwell NSO2AD*, al variare del parametro di accuratezza ACC. I parametri del sistema sono:  $W_{12} = 1.4 \text{ sec}^{-1}$ ,  $W_{21} = 1.2 \text{ sec}^{-1}$ ,  $R = 7.0 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1}$ ,  $A_{21} = 100 \text{ sec}^{-1}$ ,  $A_{32} = 10^9 \text{ sec}^{-1}$ ,  $A_{43} = 10^9 \text{ sec}^{-1}$ ,  $C_{up} = 5.0 \cdot 10^{-23} \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1}$ ,  $C_{14} = 3.5 \cdot 10^{-23} \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1}$  e  $C_3 = 5.0 \cdot 10^{-23} \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1}$ , con una concentrazione totale di ioni d'erbio pari ad  $N_T = 4.0 \cdot 10^{26} \text{ ioni/m}^3$ .

N. iterazioni	$N_1$ [ioni/m <sup>3</sup> ]	$N_2$ [ioni/m <sup>3</sup> ]	$N_3$ [ioni/m <sup>3</sup> ]	$N_4$ [ioni/m <sup>3</sup> ]
$10^1$	$1.60103889 \cdot 10^{22}$	$3.9757574 \cdot 10^{24}$	$-4.10505403 \cdot 10^{21}$	$-4.10818027 \cdot 10^{21}$
$10^2$	$1.20099471 \cdot 10^{22}$	$3.98797429 \cdot 10^{24}$	$1.99620602 \cdot 10^{18}$	$7.9454152 \cdot 10^{17}$
$10^3$	$1.20099471 \cdot 10^{22}$	$3.98797429 \cdot 10^{24}$	$1.99620602 \cdot 10^{18}$	$7.94550938 \cdot 10^{17}$
$10^4$	$1.20099469 \cdot 10^{22}$	$3.98797429 \cdot 10^{24}$	$1.99619659 \cdot 10^{18}$	$7.94550945 \cdot 10^{17}$
$10^5$	$1.2009945 \cdot 10^{22}$	$3.98797429 \cdot 10^{24}$	$1.99619652 \cdot 10^{18}$	$7.94551018 \cdot 10^{17}$
$10^6$	$1.20099258 \cdot 10^{22}$	$3.98797431 \cdot 10^{24}$	$1.99619587 \cdot 10^{18}$	$7.94551695 \cdot 10^{17}$
$10^7$	$1.20098204 \cdot 10^{22}$	$3.98797442 \cdot 10^{24}$	$1.99619248 \cdot 10^{18}$	$7.94555232 \cdot 10^{17}$

**Tabella 4.2:** Soluzioni delle *population rate equations*, ottenute con la subroutine della *Harwell NSO2AD*, al variare del numero di iterazioni eseguite. I parametri del sistema sono analoghi a quelli del precedente sistema in tabella 4.1, a parte  $W_{12} = 1.2 \text{ sec}^{-1}$ ,  $W_{21} = 1.6 \text{ sec}^{-1}$ ,  $R = 1.0 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$  ed  $N_T = 4.0 \cdot 10^{24} \text{ ioni/m}^3$ , con IFLAG =  $N_T/10$ .

soluzione corrispondente è palesemente sbagliata. Questo esempio giustifica il compromesso realizzato per la scelta del numero massimo di iterazioni: 1000 significa ottenere, comunque, soluzioni con una buona accuratezza, senza sprechi temporali dovuti a soluzioni che richiederebbero un numero maggiore

di passi.



# Capitolo 5

## Confronto e analisi dei risultati

Per verificare la validità del modello per l'amplificatore ottico esposto nei capitoli precedenti, si è reso necessario il confronto tra i risultati ottenuti con il simulatore implementato in questo lavoro di tesi, EDH15AMPLI, e il simulatore "classico" basato sul modello spaziale e sul metodo di *Runge-Kutta*, SPAZGAIN. Il confronto è stato realizzato su diverse strutture e per diversi parametri di ingresso. In questo capitolo, si sono, inoltre, stabiliti i limiti entro cui si può ritenere valido il modello  $z$ -invariante, basato sul solutore modale.

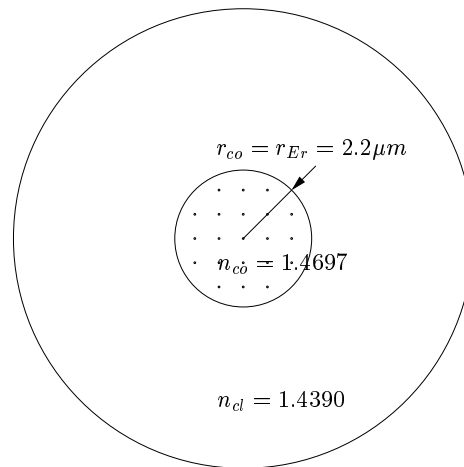
In tutte le simulazioni effettuate si è impiegata una pompa operante alla lunghezza d'onda  $\lambda_p$  di 980 nm, corrispondente ad un picco di assorbimento della caratteristica spettrale dell'erbio. Per gli amplificatori ottici, questa scelta garantisce le prestazioni migliori, sia in termini di guadagno, che in termini di rumore. Inoltre, pompando a 980 nm, si annulla il fenomeno di assorbimento da stati eccitati (*ESA*), per il quale, in una certa percentuale, la potenza di pompa viene assorbita da ioni d'erbio che si trovano già ad un livello metastabile (eccitato), peggiorando l'efficienza dei dispositivi [Bja93].



Per le lunghezze degli amplificatori che vengono considerate, le perdite, dovute al vetro ospite, delle guide d'onda e delle fibre ottiche in questione, sono piccole, quindi, in tutte le simulazioni effettuate, vengono trascurate.

## 5.1 Fibra *Step*

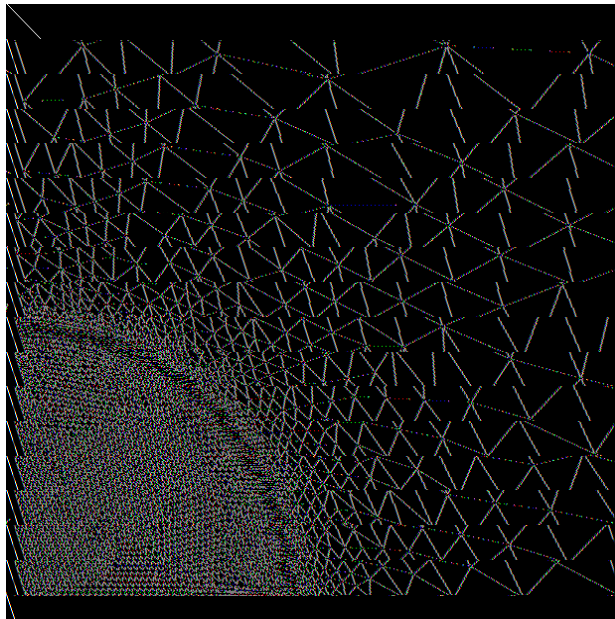
La prima struttura studiata tramite il simulatore progettato è l' *EDFA* (*Erbium-Doped Fiber Amplifier*), cioè la fibra *step*, drogata con erbio. Il raggio del *core* è  $r_{co} = 2.2 \mu m$ , il suo indice efficace  $n_{co} = 1.4697$ , mentre l'indice efficace del *cladding* è  $n_{cl} = 1.4390$ . La geometria della sezione della fibra *step* è mostrata in figura 5.1. Con questi dati, la struttura risulta essere



**Figura 5.1:** Geometria della sezione trasversale della fibra ottica di tipo *step*.

monomodale per la lunghezza d'onda della pompa ( $980 \text{ nm}$ ), a maggior ragione, è monomodale per tutte le lunghezze d'onda dei canali analizzati (tra  $1500 \text{ nm}$  e  $1600 \text{ nm}$ ). Per rendere più veloci le simulazioni, lo studio è stato effettuato su un quarto dell'intero dominio  $\Omega$ , assegnando sui piani di sim-

metria, le dovute condizioni di conduttore elettrico o conduttore magnetico. Attraverso l'applicativo *GID*, si è realizzata la *mesh*, mostrata in figura 5.1, necessaria per l'analisi modale attraverso il *FEM*. Il numero di triangoli è pari a 6488, il numero degli spigoli è 9810, mentre i nodi sono 13133. Ovviamente la *mesh* è particolarmente fitta in corrispondenza del *core*, dove ci sono le variazioni dell'intensità normalizzata  $\psi(x, y)$  più veloci, ma soprattutto è fitta nell'interfaccia tra *core* e *cladding*, che coincide con l'interfaccia tra zona drogata e zona non drogata. Infatti, in questa regione, si trova un gradino nel profilo delle densità di popolazione dei livelli fondamentale e metastabile, a causa del fatto che dove non c'è drogante,  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$  sono chiaramente nulle, mentre dove c'è drogante, i suddetti livelli energetici sono popolati. Le *cross sections* sono state caratterizzate come descritto



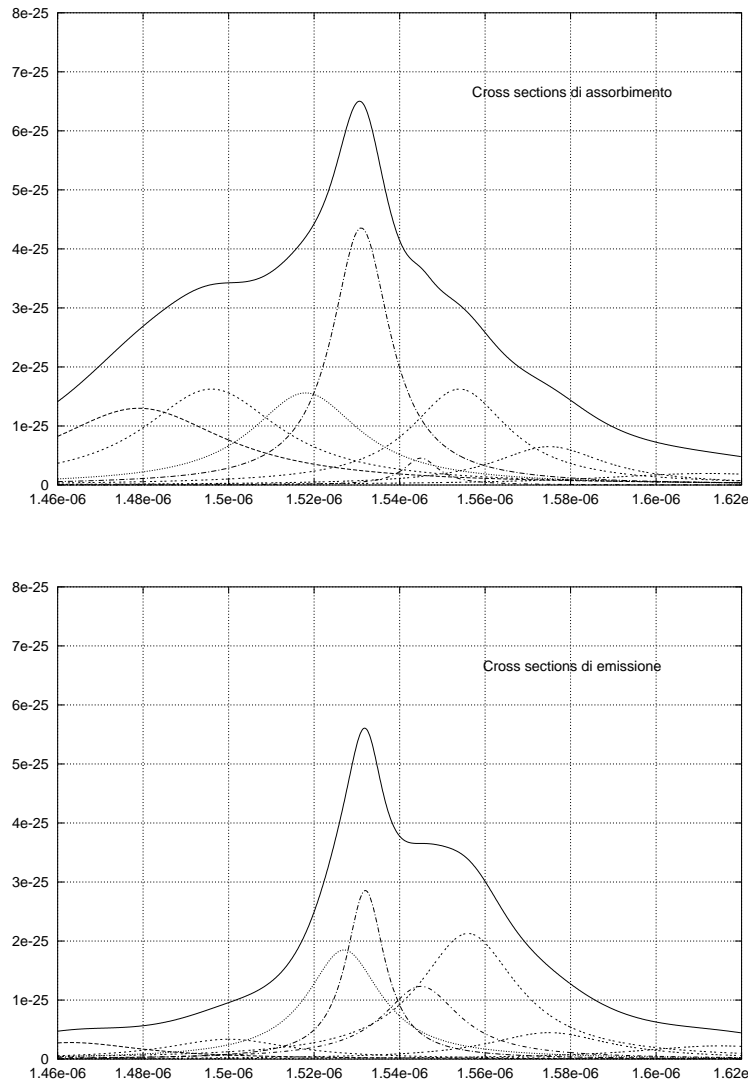
**Figura 5.2:** Particolare della *mesh* relativa al quarto di sezione della fibra *Step*.

nelle sezioni 3.3 e 4.2: gli andamenti, mostrati in figura 5.3, sono stati presi da [Her99] e sono stati entrambi “fittati” con 8 *lorentziane*, i cui parametri sono riferiti nella tabella 5.1. Il coefficiente di assorbimento della pompa è

Numero	Assorbimento			Emissione		
	$\sigma_{as}^{peak} = 6.5 \times 10^{-25} m^2$			$\sigma_{em}^{peak} = 5.6 \times 10^{-25} m^2$		
$i$	Ampiezza $a_i^{as}$	Centro $\lambda_i^{as}(nm)$	Larghezza $\Delta\lambda_i^{as}(nm)$	Ampiezza $a_i^{em}$	Centro $\lambda_i^{em}(nm)$	Larghezza $\Delta\lambda_i^{em}(nm)$
1	0.20	1479	50	0.05	1463	42
2	0.25	1496	39	0.06	1500	36
3	0.24	1518	31	0.33	1527	21
4	0.67	1531	16.5	0.51	1532	11
5	0.07	1545	10	0.22	1545	22
6	0.25	1554	28	0.38	1556	28
7	0.10	1575	32	0.08	1575	35
8	0.03	1612	65	0.04	1615	50

**Tabella 5.1:** Parametri delle *lorentziane*, 6 e 8, rispettivamente utilizzate per l'approssimazione delle *cross sections* di assorbimento e di emissione della guida d'onda.

pari a  $\sigma_{13} = 1.75 \times 10^{-25} m^2$ , mentre i tempi di vita medi degli ioni d'erbio che si trovano negli stati energetici eccitati sono:  $\tau_{21} = 11 ms$ ,  $\tau_{32} = 1 ns$  e  $\tau_{43} = 1 ns$ , così come è indicato in [Zob94] e [DiP93]. La zona drogata coincide con il *core* della fibra, all'interno del quale il profilo della concentrazione del drogante segue un andamento di tipo  $\alpha \longrightarrow N_T(r) = N_0(1 - (r/r_{Er})^\alpha)$ , con  $\alpha = 3$  e valore di picco  $N_0 = 4.14 \times 10^{24} \text{ ioni}/m^3$ . Le simulazioni sono state ripetute nei due diversi casi in cui si sono trascurati, o si sono considerati, i fenomeni di *up-conversion* e di *cross relaxation*. In questo secondo caso, i relativi coefficienti, che compaiono nelle *propagation rate equa-*



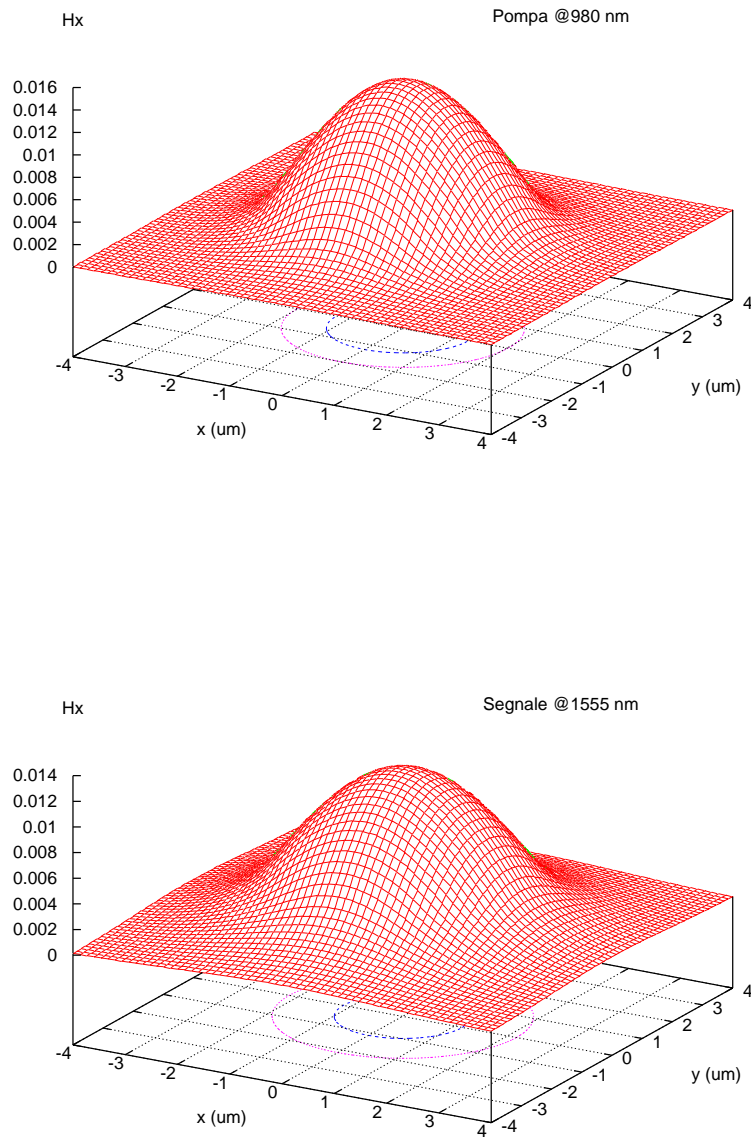
**Figura 5.3:** Andamenti delle *cross sections* di assorbimento e di emissione ottenuti con la serie di *lorentziane* con i parametri mostrati in tabella 5.1.

*tions* (4.12), sono stati assunti pari a  $C_{up} = C_3 = 5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{sec}$  e  $C_{14} = 3.5 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{sec}$ . Tali valori sono tipici e sono stati estratti da [Zob94] e [DiP93]. Le simulazioni sono state replicate per diversi valori della lunghezza  $L$  dell'amplificatore. In ingresso all'amplificatore si sono considerati 31 canali, con lunghezze d'onda comprese tra  $1520 \text{ nm}$  e  $1560 \text{ nm}$ ,

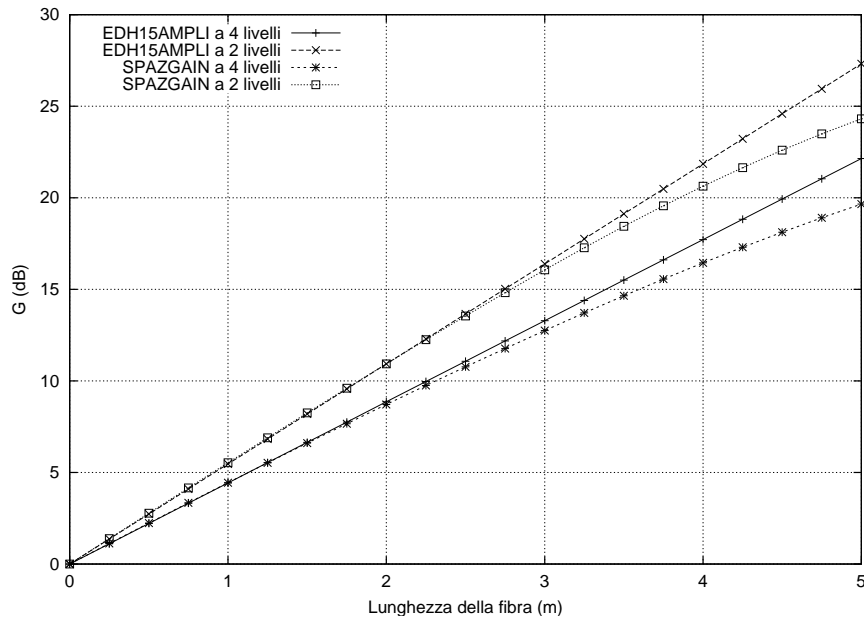
la cui potenza è inizialmente pari a  $P_s = 0.6 \mu m$ , mentre la potenza della pompa è  $P_p = 19.8 mW$ .

La figura 5.4 mostra che, a causa della piccola differenza tra l'indice di rifrazione del *core* e l'indice di rifrazione del *cladding*, la potenza della pompa e del segnale non è ben confinata all'interno del *core* della fibra *step*.

Innanzitutto, si è verificata la bontà di EDH15AMPLI, stimando i valori di guadagno del segnale alla lunghezza d'onda  $\lambda = 1532 nm$ , corrispondente ai picchi delle *cross sections*, su amplificatori di diverse lunghezze  $L$ . I risultati sono mostrati nella figura 5.5. Come era logico aspettarsi i due simulatori hanno stimato valori di guadagno più elevati nel caso del sistema a 2 livelli, piuttosto che nel caso del sistema a 4 livelli, in cui si sono considerati i fenomeni dell'*up-conversion* e della *cross relaxation*. Si nota che al crescere della lunghezza  $L$  dell'amplificatore, lo scostamento tra i guadagni  $G_{dB}$  stimati dai due simulatori, tende ad aumentare. In particolare EDH15AMPLI, rispetto a SPAZGAIN, tende a sovrastimare notevolmente tali valori. Questo limite è dovuto al fatto che, essendo basato sul modello  $z$ -invariante, EDH15AMPLI non prende in considerazione la variazione lungo  $z$  delle popolazioni dei livelli fondamentale e metastabile  $N_1$  ed  $N_2$ , quindi valuta l'amplificazione come se il sistema si trovasse nelle condizioni di massima inversione di popolazione, su tutta la lunghezza della guida d'onda. Ovviamente questa condizione è realmente mantenuta solo nella sezione iniziale dell'amplificatore, cioè con  $z = 0$ . Con  $z$  crescente,  $N_2$  tende a diminuire ed  $N_1$  tende ad aumentare, come mostrato in figura 5.6. Inoltre, come si è detto nel capitolo 3, EDH15AMPLI trascura il fenomeno dell'*ASE*, mentre SPAZGAIN ne tiene conto, tale fenomeno è tanto più significativo, quanto più è lungo l'amplificatore. Da notare che i valori di  $G_{dB}$  calcolati con EDH15AMPLI si muovono su di una retta, la cui pendenza è determinata



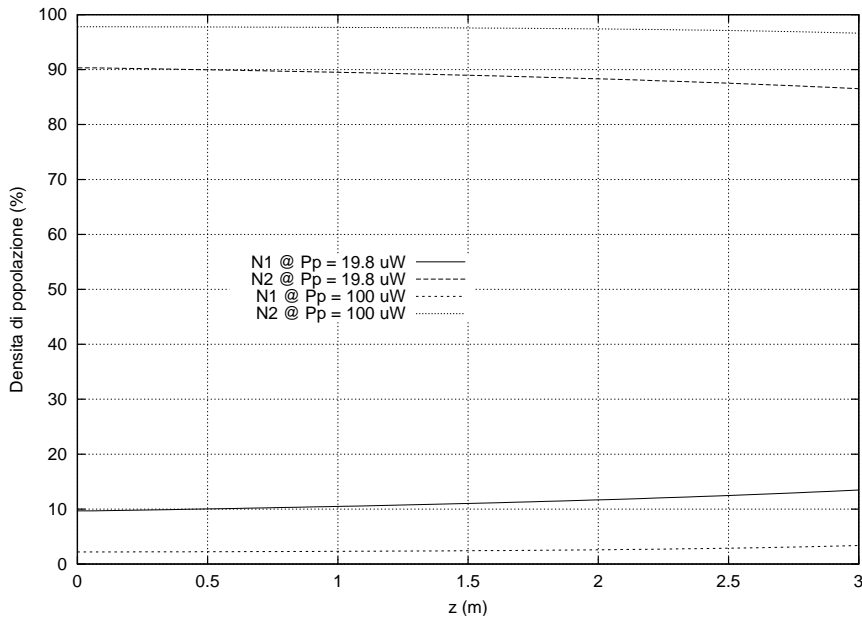
**Figura 5.4:** Andamento della componente dominante del campo magnetico  $H_{11}^x$ , per le lunghezze d'onda di pompa e segnale, che si propagano all'interno della fibra *step*.



**Figura 5.5:** Valori di guadagno  $G_{dB}$ , ottenuti sul segnale a lunghezza d'onda  $\lambda = 1532 \text{ nm}$ , al variare della lunghezza  $L$  della fibra *step*, drogata con erbio, nei due diversi casi di sistema a 4 livelli e di sistema a 2 livelli.

dalla costante di attenuazione  $\alpha$ , parte reale della costante di propagazione  $\gamma$ , data dalla relazione (3.5). Questo equivale, come era già stato detto, ad avere un andamento esponenziale lungo  $z$ , della potenza dei segnali  $P_s$ . È possibile affermare che, fino alla lunghezza  $L = 2.5 \text{ m}$  i valori  $G_{dB}$  stimati da EDH15AMPLI, siano dentro una tolleranza accettabile (per  $L = 2.5 \text{ m}$ , l'errore è pari allo 0.8% per il sistema a 2 livelli e al 2.8% nel sistema a 4 livelli), mentre per  $L$  maggiori il modello  $z$ -invariante non è più valido.

Nella già citata figura 5.6, sono mostrati gli andamenti delle due densità di popolazione principali,  $N_1$  ed  $N_2$ , nel punto centrale del *core* della fibra, per due diversi valori della potenza di pompa,  $P_p = 19.8 \text{ mW}$  e  $P_p = 100 \text{ mW}$ . Questi grafici sono ottenuti mediante l'uso di SPAZGAIN, sul sistema a 4 livelli, perchè, con EDH15AMPLI, non è possibile ricavare l'andamento di alcuna grandezza in funzione di  $z$ , in quanto è basato sul modello  $z$ -invariante, per

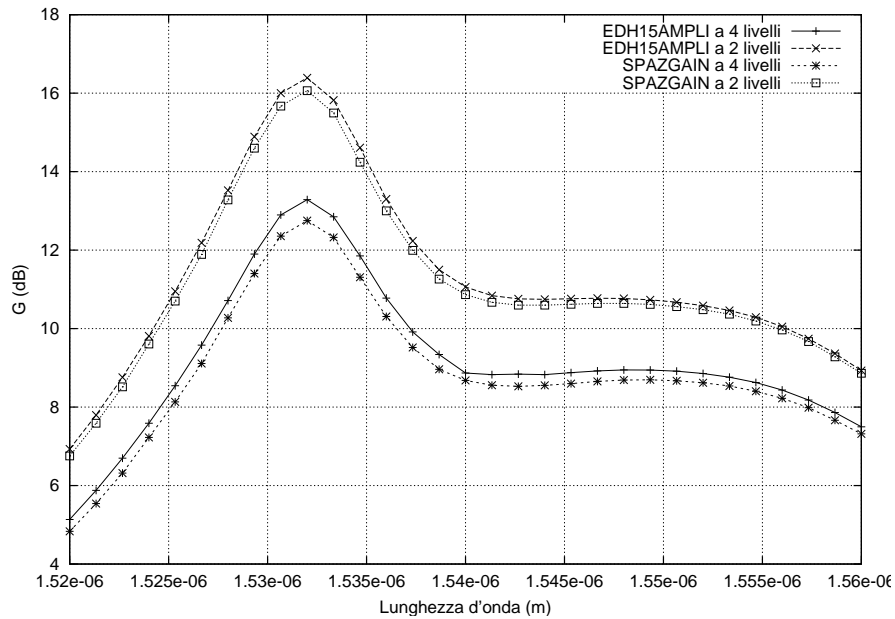


**Figura 5.6:** Andamenti delle densità di popolazione percentuali  $N_1(z)$  ed  $N_2(z)$  lungo  $z$ , in un sistema a 4 livelli, per due diversi valori della potenza della pompa:  $P_p = 19.8 \text{ mW}$   $P_p = 100 \text{ mW}$ .

il quale ogni grandezza in gioco è costante lungo  $z$ . La condizione di invarianza lungo  $z$  delle densità di popolazione, è mantenuta tanto più a lungo, quanto più è elevata la potenza di pompa. In questo caso, infatti, a parità di potenza  $P_s$  dei segnali in ingresso, la sua riduzione percentuale è minore. Inoltre, maggiore è il valore di  $P_p$ , maggiore è l'inversione di popolazione ottenuta (con  $P_p = 100 \text{ mW}$  l'inversione di popolazione è del 98%, mentre con  $P_p = 19.8 \text{ mW}$  è solo del 90%).

Le situazioni precedenti sono state valutate su tutto lo spettro dei 31 segnali di ingresso. Sono stati quindi ricavati i diagrammi spettrali di guadagno in funzione della lunghezza d'onda, utilizzando i due diversi simulatori, nei due casi di sistema a 2 livelli e di sistema a 4 livelli. In figura 5.7 sono mostrati i risultati, per una lunghezza dell'amplificatore  $L = 3 \text{ m}$ , che permette di valutare bene le differenze fra i due modelli. L'andamento dei diagrammi



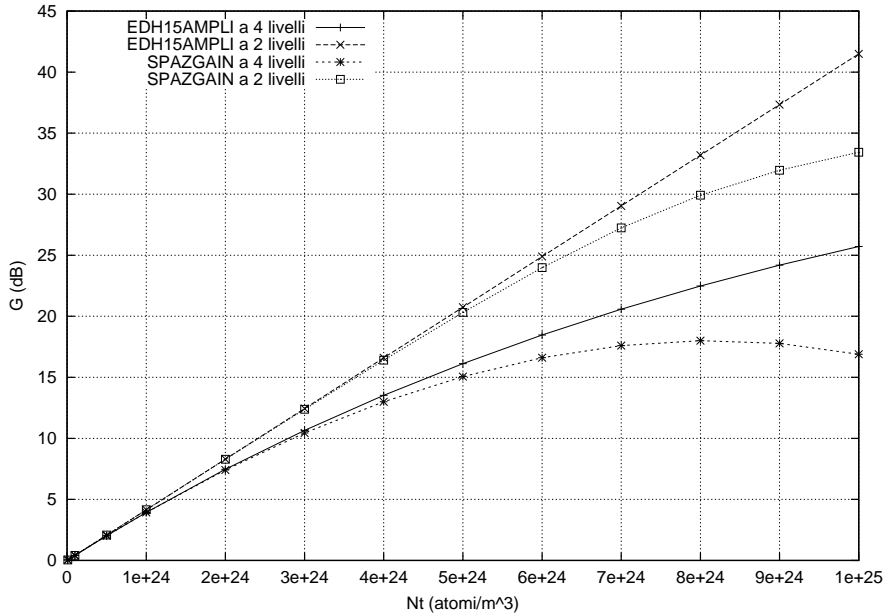


**Figura 5.7:** Valori di guadagno  $G_{dB}$  dei segnali a diversa lunghezza d'onda  $\lambda$ , che si propagano all'interno della fibra *step*, drogata con erbio, di lunghezza  $L = 3$  m, nei due diversi casi di sistema a 4 livelli e di sistema a 2 livelli.

spettrali seguono l'andamento delle *cross sections* di emissione (figura 5.3). Si nota che EDH15AMPLI sovrastima i valori di  $G_{dB}$ , in modo uniforme su tutto lo spettro, in particolare lo scostamento maggiore lo si nota guardando i risultati ottenuti considerando il sistema a 4 livelli.

Sono state realizzate diverse simulazioni al variare della concentrazione del drogante  $N_T$ . Gli esiti di tali simulazioni sono mostrati in figura 5.8; si nota immediatamente che i due simulatori entro bassi livelli di concentrazione del drogante, forniscono risultati analoghi, mentre al crescere di  $N_T$ , EDH15AMPLI sovrastima notevolmente il guadagno  $G_{dB}$ . Il limite entro cui i risultati di EDH15AMPLI possono essere accettati, è diverso se si considera il sistema a 2 livelli oppure il sistema a 4 livelli. Infatti, nel primo caso, fino ad una concentrazione  $N_T = 5 \times 10^{24}$  ioni/ $m^3$ , la differenza tra i guadagni  $G_{dB}$  forniti dai due simulatori è contenuta entro 0.45 dB (intorno al 2%). Nel

secondo caso, invece, già oltre una concentrazione  $N_T = 4 \times 10^{24}$  ioni/ $m^3$ , il divario diventa importante (intorno al 4%). È necessario osservare che

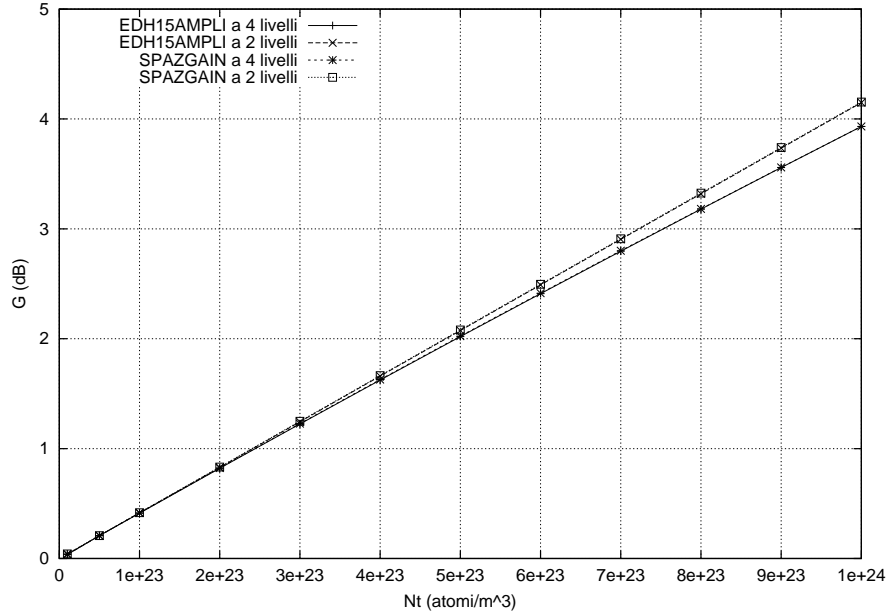


**Figura 5.8:** Valori di guadagno  $G_{dB}$  ottenuti sulla fibra *Step*, calcolati con EDH15AMPLI e con SPAZGAIN, considerando sia il sistema a 2 livelli, che il sistema a 4 livelli. I risultati sono mostrati al variare della concentrazione del drogante  $N_T$ .

le due coppie di curve, corrispondenti alle due diverse scelte sul numero di livelli, cominciano a divaricarsi già per valori di concentrazione più bassi. Trova quindi giustificazione la decisione di studiare le strutture con alte concentrazione d'erbio, considerando i fenomeni di *up-conversion* e *cross relaxation*. La figura 5.8 mostra che esiste un valore ottimo di concentrazione del drogante, per il quale si ottiene l'amplificazione massima; nelle condizioni di queste simulazioni, il suddetto valore è intorno ad  $N_T = 8 \times 10^{24}$  ioni/ $m^3$ .

La figura 5.9 mostra chiaramente come i risultati dei due diversi simulatori, tendano a convergere per bassi valori della concentrazione del drogante

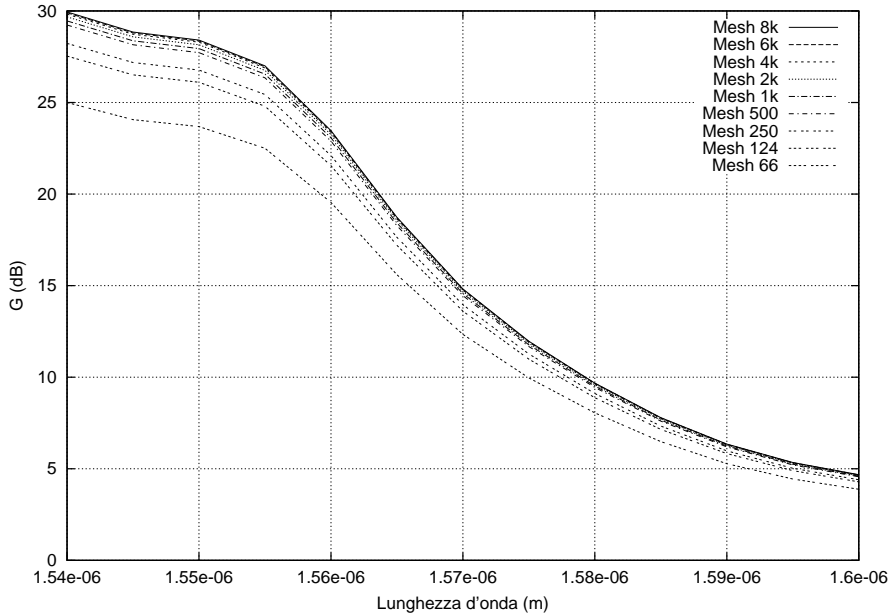
$N_T$ , proprio come ci si aspettava. Infatti, se sono presenti pochi ioni d'erbio, l'assorbimento della potenza della pompa avviene più lentamente: è mantenuta l'ipotesi fondamentale, dell'invarianza delle popolazioni lungo  $z$ .



**Figura 5.9:** Ingrandimento del grafico precedente (figura 5.8) sui valori bassi di  $N_T$ .

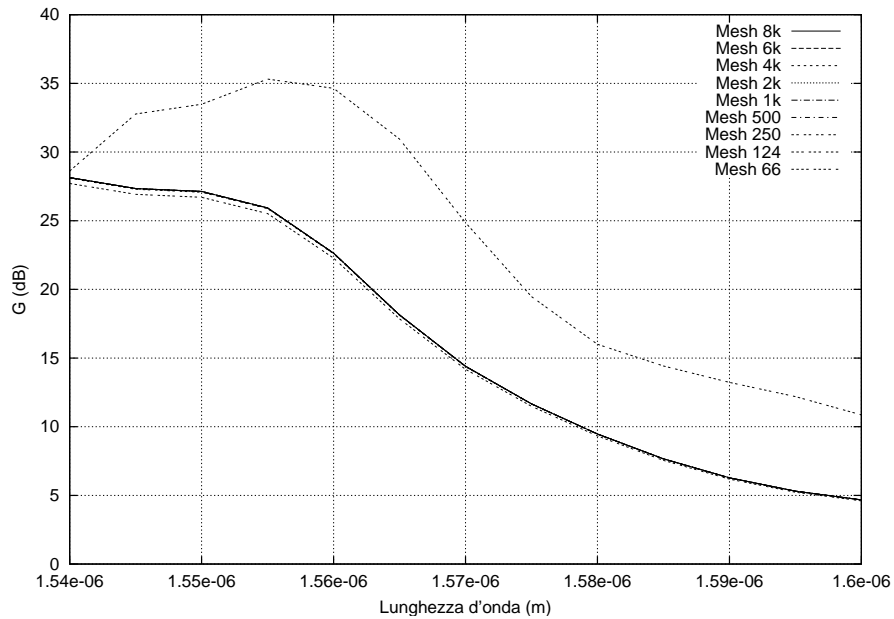
Una prova molto interessante, è lo studio del comportamento dei due simulatori, EDH15AMPLI e SPAZGAIN, al variare del numero di triangoli con cui si è diviso il dominio  $\Omega$ . Sulle medesime strutture, si sono generate diverse *mesh*, a partire dalla più fitta, con 8000 triangoli, fino ad arrivare alla meno fitta, composta da 66 triangoli. La fibra *step* su cui si è realizzata questa prova è diversa da quella precedentemente studiata, in particolare: il *core* ha un raggio  $r_{co} = 2 \mu m$ , con indice di rifrazione  $n_{co} = 1.45$ , l'indice di rifrazione del *cladding* è  $n_{cl} = 1.438$ . L'amplificatore ha una lunghezza  $L = 2 m$ , una concentrazione del drogante  $N_T = 1.74 \times 10^{25} \text{ ioni}/m^3$ , costante per tutta

la zona drogata, che coincide con l'area del *core*. Sono stati trascurati i fenomeni dell'*up-conversion* e della *cross relaxation*, assumendo una potenza di pompa abbastanza elevata,  $P_p = 100 \text{ mW}$ . Il coefficiente di assorbimento della pompa è  $\sigma_{13} = 2.53 \times 10^{-25} \text{ m}^2$  e il tempo medio di vita  $\tau_{21} = 10 \text{ msec}$ . In ingresso sono stati considerati 13 canali, con lunghezze d'onda comprese tra  $1540 \text{ nm}$  e  $1600 \text{ nm}$  e potenza iniziale  $P_s = 1 \text{ }\mu\text{m}$ . I risultati ottenuti con EDH15AMPLI e SPAZGAIN, sono rispettivamente mostrati nelle figure 5.10 e 5.11.



**Figura 5.10:** Risultati di simulazioni effettuate da EDH15AMPLI, ripetute sulla medesima fibra *step*, nella medesima condizioni, variando il numero di triangoli della *mesh*, da 8000, a 66.

Si nota che EDH15AMPLI, calcolando il guadagno attraverso la costante di propagazione complessa  $\gamma$ , quindi attraverso l'autovalore del problema, è molto sensibile alla precisione della *mesh*. SPAZGAIN, che invece calcola il

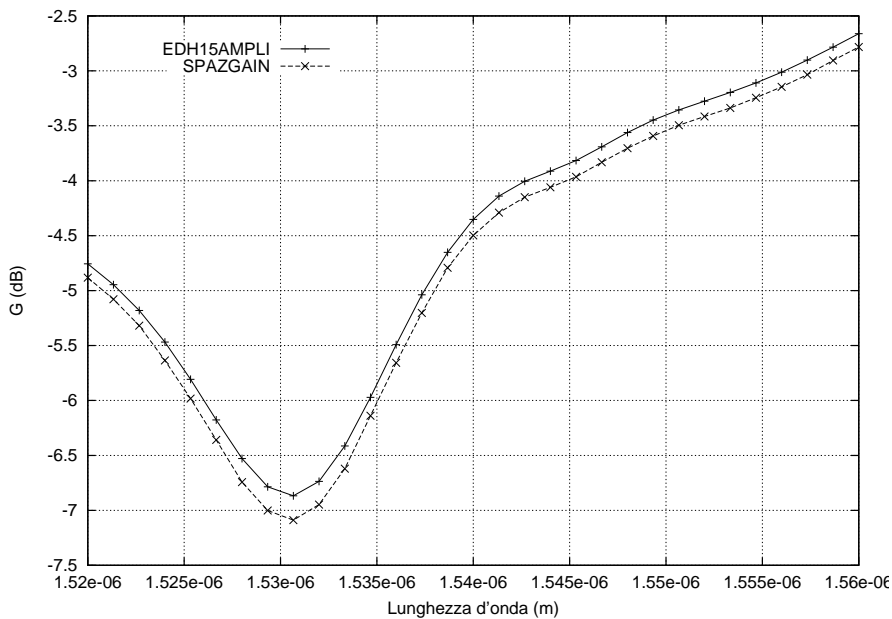


**Figura 5.11:** Risultati di simulazioni effettuate da SPAZGAIN, ripetute sulla medesima fibra *step*, nella medesime condizioni, variando il numero di triangoli della *mesh*, da 8000, a 66.

guadagno attraverso le componenti del campo elettromagnetico, quindi attraverso l'autovettore del problema, è molto più robusto alla variazione del numero di triangoli con cui si divide il dominio  $\Omega$ . In particolare, con il primo si assiste ad un graduale abbassamento dei valori di guadagno stimati, pur mantenendo lo stesso andamento spettrale, mentre con il secondo, i valori di guadagno stimati sono pressochè coincidenti per ogni *mesh*, fatta eccezione per quella meno fitta, a 66 triangoli, in corrispondenza della quale il simulatore fornisce risultati completamente insensati.

Con EDH15AMPLI si possono agevolmente calcolare le perdite, causate dalla presenza del drogante, della fibra *step*: si sono ripetute le simulazioni sullo spettro compreso tra  $\lambda = 1520 \text{ nm}$  e  $\lambda = 1560 \text{ nm}$ , senza la pompa ( $P_p = 0 \text{ W}$ ), su di un amplificatore della lunghezza di  $1 \text{ m}$ . Ovviamente, il sistema non pompato, non amplifica, ma anzi attenua fortemente il segnale,

proprio a causa della presenza degli ioni d'erbio. Quello che risulta sono i valori di attenuazione  $\alpha_{dB}$ , subiti dai segnali in ingresso, su di una fibra lunga 1 m, Le quantità graficate in figura 5.12, sono quindi i valori di  $\alpha(\lambda)[dB/m]$  caratteristici del mezzo considerato, in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$ .



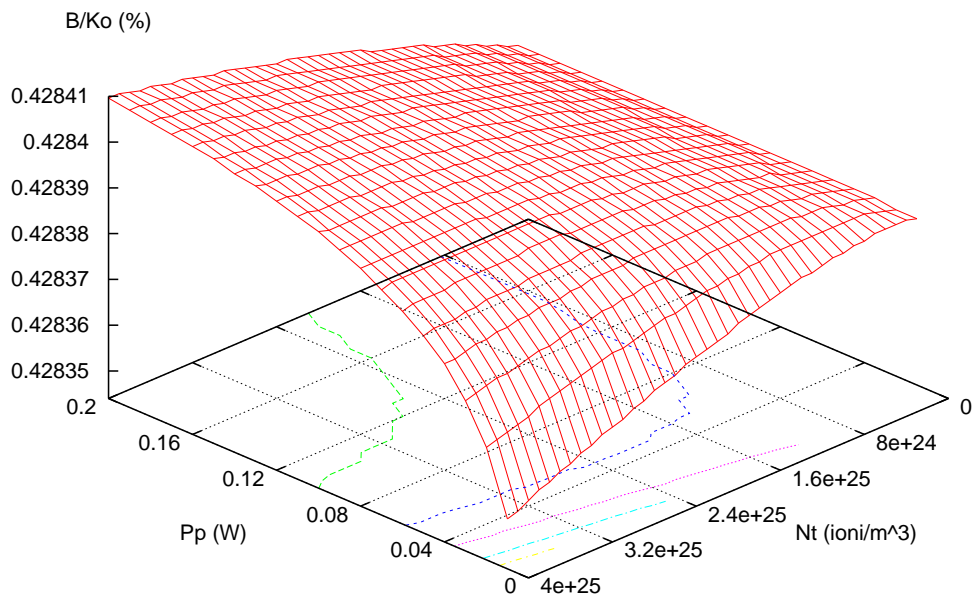
**Figura 5.12:** Diagramma spettrale dell'attenuazione  $\alpha[dB/m]$ , introdotta della fibra *step*, drogata con erbio, quando non è pompata ( $P_p = 0$ ).

EDH15AMPLI calcola sia la costante di propagazione complessa  $\gamma$  del modo che si propaga nella fibra non drogata, sia quella del modo che si propaga nella fibra drogata. Nella figura 5.13, è graficato, in funzione della concentrazione dell'erbio  $N_T$  e della potenza di pompa  $P_p$ , l'andamento della variazione percentuale di  $\beta/k_0$  (parte immaginaria dell'autovalore del problema) tra il mezzo imperturbato, in assenza di drogante, ed il mezzo perturbato dalla

presenza del drogante. In formule:

$$\Delta(\beta/k_0) = \frac{(\beta/k_0 - \beta/k_0|_{Er}) \times 100}{\beta/k_0} \quad (5.1)$$

dove  $\gamma = \alpha + j\beta$ , con  $\alpha$  costante di attenuazione e  $\beta$  costante di fase. Le



**Figura 5.13:** Variazione percentuale di  $\beta/k_0$  nella fibra *step*, dovuta alla presenza del drogante, al variare della concentrazione del drogante  $N_T$  e della potenza della pompa  $P_p$ .

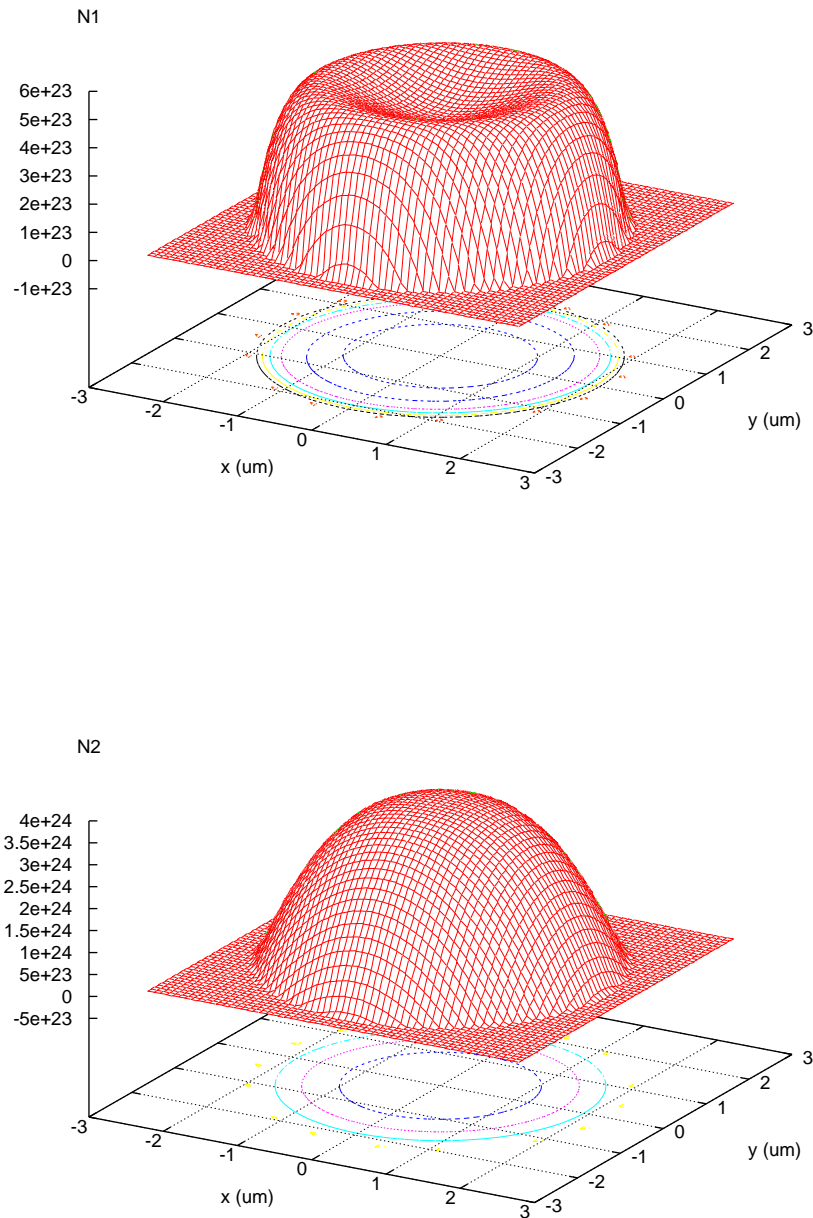
variazioni sono molto limitate (intorno lo 0.428%); in particolare per basse concentrazioni del drogante,  $\Delta(\beta/k_0)$  è costante al variare di  $P_p$ , mentre, per concentrazioni maggiori,  $\Delta(\beta/k_0)$  aumenta con  $P_p$  crescente.

Nella figura 5.14 sono mostrati gli andamenti delle densità di popolazione

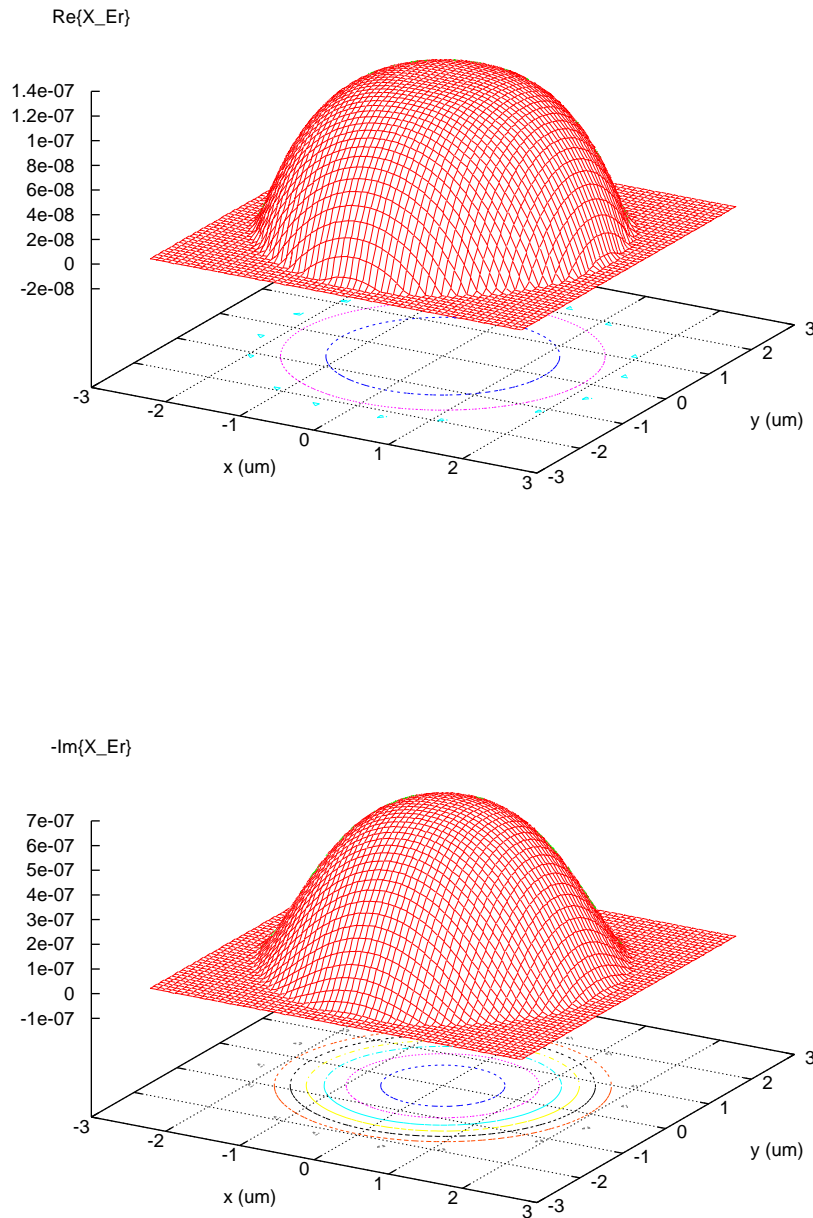
ai livelli energetici fondamentale e metastabile,  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$ , “plot-tati” con GNU PLOT, sulla sezione della fibra *step*. Nella zona centrale della fibra, tra  $N_1$  ed  $N_2$ , c’è la differenza di un ordine di grandezza (corrispondente ad un’inversione di popolazione del 10%), che tende a diminuire spostandosi verso il *cladding*. L’inversione di popolazione, infatti, tende a seguire l’andamento dell’intensità normalizzata della pompa, che, ovviamente, è una campana con il picco nel centro del *core*. La somma di  $N_1$  ed  $N_2$  dà luogo al profilo della concentrazione del drogante di tipo  $\alpha$ , caratteristico della fibra *step* studiata. Ovviamente, nella zona dove non c’è drogante, in questo caso nel *cladding*, le densità di popolazione  $N_1$  ed  $N_2$  sono nulle.

Lo stesso tipo di grafico è stato realizzato per rappresentare la suscettività complessa  $\chi_{Er}(x, y)$  dovuta alla presenza dell’erbio. In particolare, nella figura 5.15, sono mostrate le due componenti: reale,  $\chi'_{Er}(x, y)$  ed immaginaria,  $-\chi''_{Er}(x, y)$ . Quest’ultima si ricava attraverso l’espressione (3.51), dalla conoscenza dei livelli di popolazione  $N_1$  ed  $N_2$  e delle *cross sections*; mentre  $\chi'_{Er}(x, y)$  si calcola mediante la (3.50), nella quale si sfrutta la semplificazione delle relazioni di *Kramers-Kronig*, vista nella sezione 3.3. È importante notare come l’andamento delle componenti reale ed immaginaria della suscettività complessa,  $\chi_{Er}(x, y)$ , sia determinato dal livello di inversione di popolazione presente nel sistema.





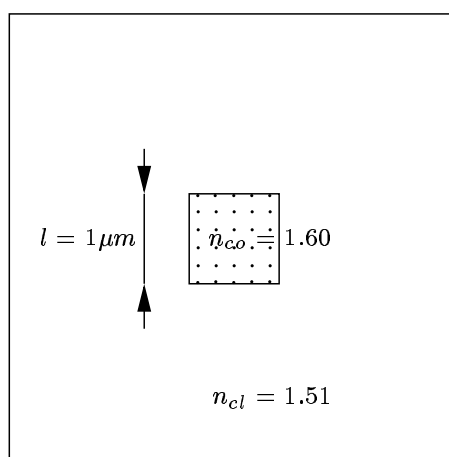
**Figura 5.14:** Andamento delle popolazioni  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$  sulla sezione trasversa della fibra *step*, con profilo della concentrazione dell'erbio di tipo  $\alpha = 3$  e picco  $N_T = 4.14 \times 10^{24}$  ioni/m<sup>3</sup>, con una potenza di pompa  $P_p = 19.8$  mW.



**Figura 5.15:** Andamento delle componenti reale,  $\chi'_{Er}(x, y)$ , e immaginaria,  $-\chi''_{Er}(x, y)$ , della suscettività complessa, sulla sezione trasversa della fibra *step*, con profilo della concentrazione dell'erbio di tipo  $\alpha = 3$  e picco  $N_T = 4.14 \times 10^{24}$  ioni/m<sup>3</sup>, con una potenza di pompa  $P_p = 19.8$  mW.

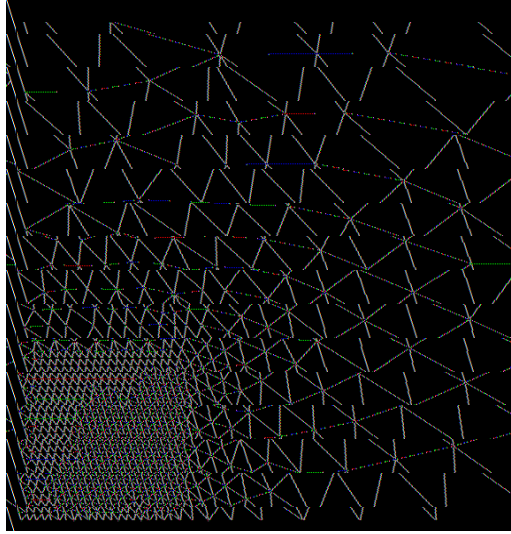
## 5.2 Guida d'onda rettangolare

Il simulatore progettato è stato testato su di una struttura classica: la guida d'onda rettangolare, la sezione del *core* è quadrata, con lato di  $1 \mu m$ , come mostrato in figura 5.2. L'indice di rifrazione del *core* è  $n_{co} = 1.6$ , mentre quello del *cladding* è  $n_{cl} = 1.51$ . Per lunghezze d'onda superiori a  $980 \text{ nm}$ , la struttura risulta essere monomodale. Essendo una geometria simmetrica su



**Figura 5.16:** Geometria della sezione trasversale della guida d'onda rettangolare.

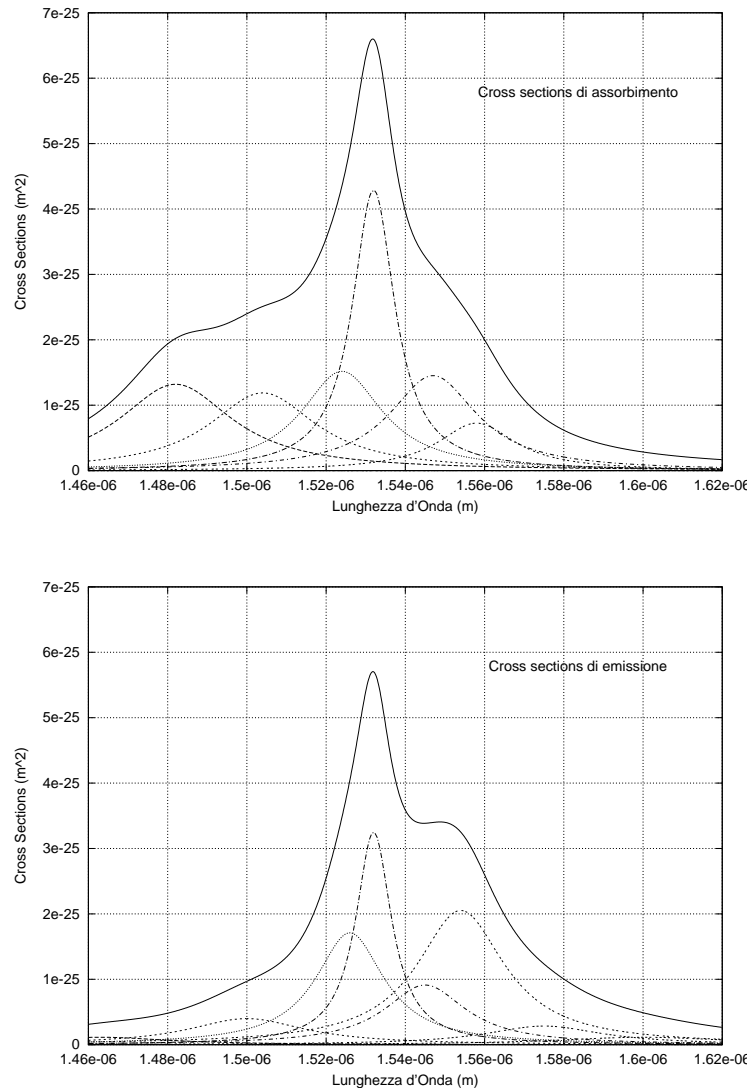
due piani, si è studiato un quarto dell'intero dominio  $\Omega$ . La *mesh* generata da *GID* per l'analisi modale attraverso il *FEM* è mostrata in figura 5.2. Questa è formata da 1550 elementi triangolari, da 2366 spigoli e da 3183 punti. Gli andamenti, in funzione della lunghezza d'onda  $\lambda$ , delle *cross sections* utilizzate, mostrate in figura 5.18, sono stati presi da [Gai93] e [Zob93]. Le curve relative alle *cross sections* di assorbimento e di emissione sono state "fittate", rispettivamente, con 6 e 8 *lorentziane*; in tabella 5.2 ne sono elencati i parametri. Si considera un coefficiente di assorbimento della pompa  $\sigma_{13} =$



**Figura 5.17:** Particolare della *mesh* relativa al quarto di sezione della guida d'onda rettangolare.

Numero	Assorbimento			Emissione		
	$\sigma_{as}^{peak} = 6.6 \times 10^{-25} \text{ m}^2$			$\sigma_{em}^{peak} = 5.7 \times 10^{-25} \text{ m}^2$		
$i$	Ampiezza $a_i^{as}$	Centro $\lambda_i^{as}(nm)$	Larghezza $\Delta\lambda_i^{as}(nm)$	Ampiezza $a_i^{em}$	Centro $\lambda_i^{em}(nm)$	Larghezza $\Delta\lambda_i^{em}(nm)$
1	0.20	1482	35	0.02	1463	42
2	0.18	1504	33	0.07	1500	36
3	0.23	1524	25	0.30	1526	21
4	0.65	1532	13	0.57	1532	11
5	0.22	1547	27	0.16	1545	25
6	0.11	1558	24	0.36	1554	27
7	—	—	—	0.05	1575	36
8	—	—	—	0.02	1600	54

**Tabella 5.2:** Parametri delle *lorentziane*, 6 e 8, rispettivamente utilizzate per l'approssimazione delle *cross sections* di assorbimento e di emissione della guida d'onda.



**Figura 5.18:** Andamenti delle *cross sections* di assorbimento e di emissione ottenuti con la serie di *lorentziane* con i parametri mostrati in tabella 5.2.

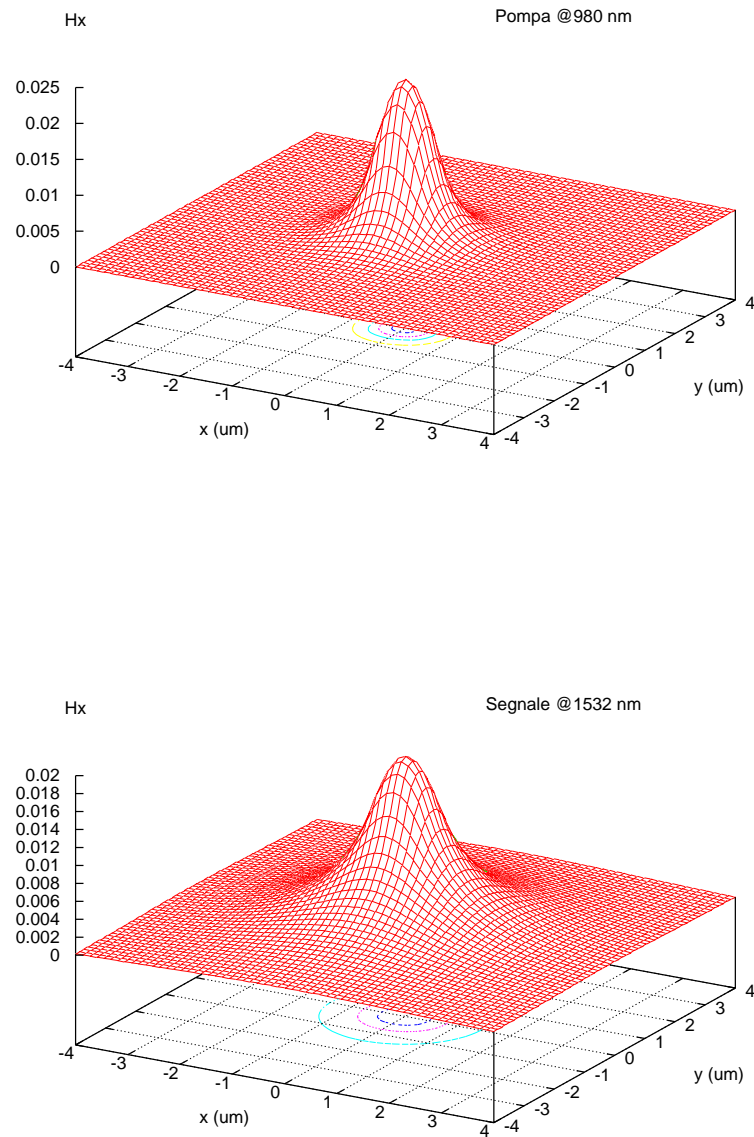
$2.58 \times 10^{-25} \text{ m}^2$ , mentre i tempi di vita degli ioni d'erbio, che si trovano negli stati eccitati, sono identici a quelli considerati nella fibra *step* (estratti da [Zob94] e [DiP93]:  $\tau_{21} = 11 \text{ ms}$ ,  $\tau_{32} = 1 \text{ ns}$ ,  $\tau_{43} = 1 \text{ ns}$ . La potenza della pompa è  $P_p = 100 \text{ mW}$ , mentre quella del segnale è  $P_s = 1 \text{ }\mu\text{W}$ . La lunghezza dell'amplificatore è stata assunta di  $8 \text{ cm}$ ; la zona drogata coincide

con il *core* della guida d'onda e la concentrazione del drogante è ritenuta costante, all'interno del *core* stesso. Sono stati considerati i fenomeni legati all'*up-conversion* e alla *cross relaxation*, assumendo i relativi coefficienti pari a quelli già utilizzati per la fibra *step*:  $C_{up} = C_3 = 5.0 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{sec}$  e  $C_{14} = 3.5 \times 10^{-23} \text{ m}^3/\text{sec}$ , estratti da [Zob94] e [DiP93].

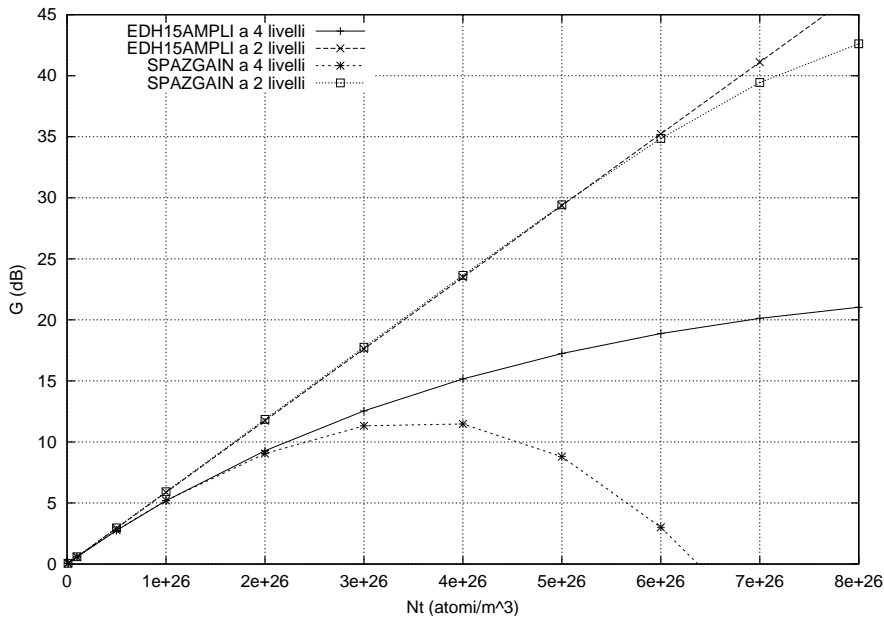
Le simulazioni sono state realizzate per un segnale di ingresso alla lunghezza d'onda  $\lambda_s$  di 1532 nm, corrispondente al picco delle *cross sections*. Dalla figura 5.19, è importante notare che, a causa delle dimensioni molto ridotte del *core* e della differenza dell'indice di rifrazione tra *core* e *cladding* non troppo elevato, la potenza del segnale non è ben confinata all'interno della zona drogata.

Sono state realizzate le simulazioni al variare della concentrazione del drogante  $N_T$ . Gli esiti di tali simulazioni, mostrati in figura 5.20, sono analoghi a quelli ottenuti per la fibra *step*, dove però i valori delle concentrazioni del drogante erano di due ordini di grandezza inferiori.

I risultati ottenuti con questa serie di simulazioni sono in grande accordo coi risultati, ottenuti sulla medesima struttura, riportati in [Zob94]. Anche nel caso della guida d'onda rettangolare, EDH15AMPLI sovrastima il guadagno  $G_{dB}$ , enfatizzando questo comportamento al crescere di  $N_T$ . Invece, entro bassi livelli di concentrazione del drogante, i due simulatori forniscono risultati analoghi. Nel sistema a 2 livelli, fino ad una concentrazione  $N_T = 5 \times 10^{26} \text{ ioni}/\text{m}^3$ , la differenza tra i guadagni  $G_{dB}$  stimati dai due simulatori è rimane entro 0.35 dB (con un errore intorno all'1%). Considerando, invece, il sistema a 4 livelli, il differenza diviene grande già alla concentrazione  $N_T = 2 \times 10^{26} \text{ ioni}/\text{m}^3$ , (con un errore intorno al 2.5%). Anche per la guida d'onda rettangolare le due coppie di curve, corrisponden-



**Figura 5.19:** Andamento della componente dominante del campo magnetico  $H_{11}^x$ , per le lunghezze d'onda di pompa e segnale, che si propagano all'interno della guida d'onda.

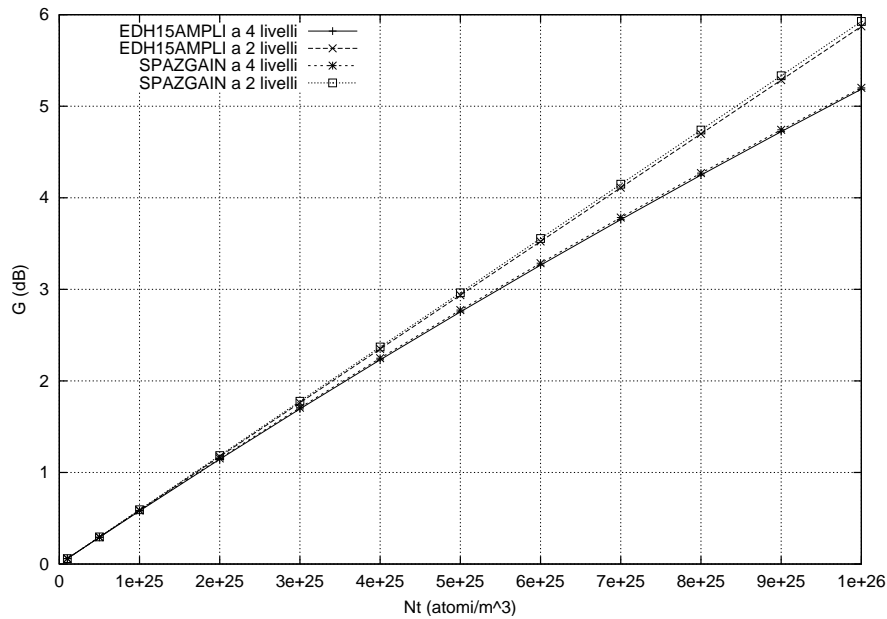


**Figura 5.20:** Valori di guadagno  $G_{dB}$  ottenuti sulla guida d'onda, calcolati con EDH15AMPLI e con SPAZGAIN, considerando sia il sistema a 2 livelli, che il sistema a 4 livelli. I risultati sono mostrati al variare della concentrazione del drogante  $N_T$ .

ti alle due diverse scelte sul numero di livelli, cominciano a divaricarsi già per valori di concentrazione più bassi. È importante notare che, con valori troppo elevati di  $N_T$ , l'amplificatore ottico non è più in grado di amplificare: oltre  $N_T = 6.4 \times 10^{26}$  ioni/m<sup>3</sup> il dispositivo attenua il segnale di ingresso. La concentrazione del drogante, per la quale si ottiene l'amplificazione massima, è compresa tra  $N_T = 3 \times 10^{26}$  ioni/m<sup>3</sup> ed  $N_T = 4 \times 10^{26}$  ioni/m<sup>3</sup>.

La figura 5.21 mostra, per bassi valori della concentrazione del drogante  $N_T$ , l'ottima convergenza dei risultati dei due diversi simulatori, dovuta allo soddisfacimento delle condizioni di invarianza lungo  $z$  delle densità di popolazione  $N_1(z)$  ed  $N_2(z)$ . Questo concetto è ben rappresentato dalla figura 5.22, in cui sono graficati gli andamenti delle popolazioni  $N_1(z)$  ed  $N_2(z)$ , dei livelli energetici fondamentale e metastabile degli ioni d'erbio, per

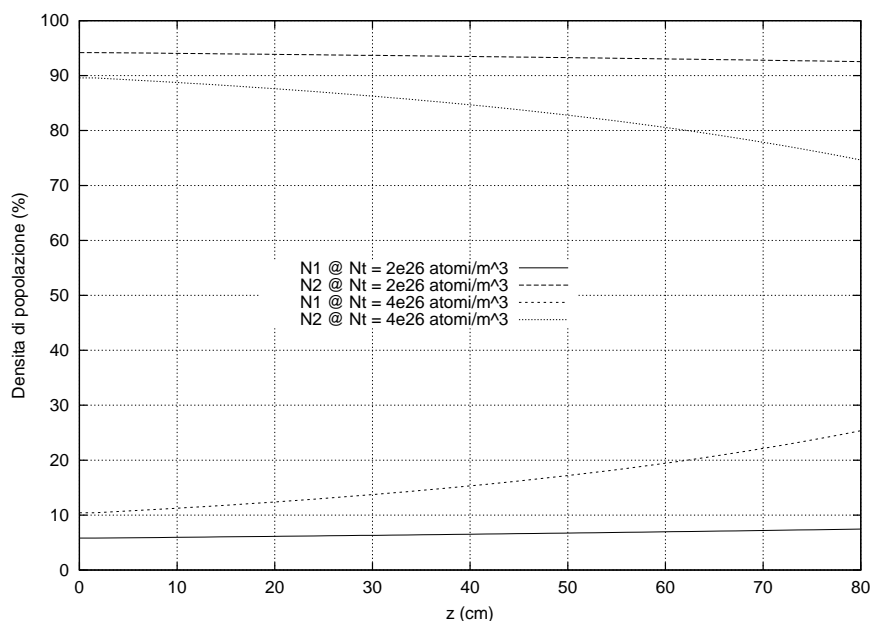




**Figura 5.21:** Ingrandimento del grafico precedente (figura 5.20) sui valori bassi di  $N_T$ .

due diversi valori della concentrazione del drogante  $N_T$ . Si nota che, con  $N_T = 2 \times 10^{26}$  ioni/m<sup>3</sup>,  $N_1$  ed  $N_2$  sono quasi costanti lungo  $z$ , mentre, con  $N_T = 4 \times 10^{26}$  ioni/m<sup>3</sup>, tra  $z = 0$  e  $z = 8$  cm, le popolazioni subiscono una variazione superiore al 15%.

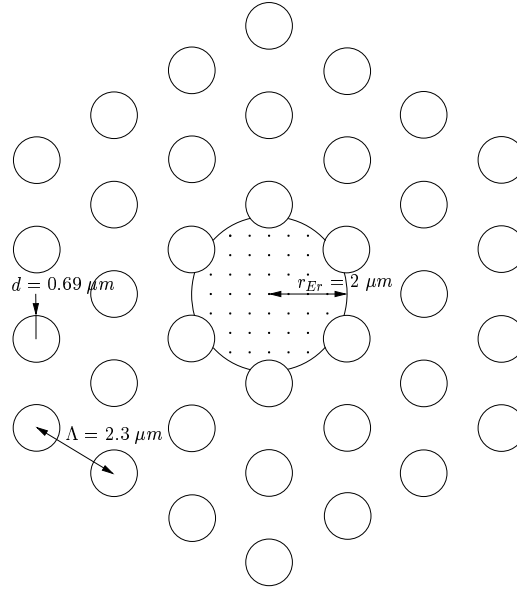
Dalla figura 5.22 è possibile constatare graficamente l'effetto dell'*up-conversion* sul sistema a 4 livelli: nel caso con  $N_T$  maggiore, tale effetto è più marcato e lo si può misurare per  $z = 0$ , cioè quando la potenza di pompa non è ancora stata assorbita. La differenza tra le due popolazioni  $N_2(0)$ , così come la differenza tra le due popolazioni  $N_1(0)$ , unicamente dovuta all'*up-conversion*, è quasi del 5%.



**Figura 5.22:** Andamenti delle densità di popolazione percentuali  $N_1(z)$  ed  $N_2(z)$  lungo  $z$ , in un sistema a 4 livelli, per una concentrazione di ioni d'erbio pari a  $N_T = 2 \times 10^{26}$  ioni/ $m^3$  ed  $N_T = 4 \times 10^{26}$  ioni/ $m^3$ .

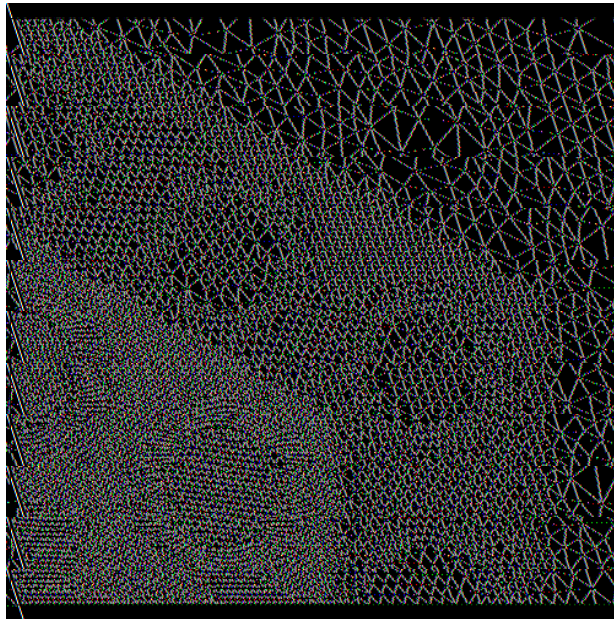
### 5.3 Fibra a cristalli fotonici

L'ultima struttura su cui si testato EDH15AMPLI è la fibra a cristalli fotonici drogata con erbio. In particolare la *PCF* considerata è triangolare, con tre anelli di fori d'aria, reciprocamente distanziati di  $\Lambda = 2.3 \mu m$ , con il diametro dei fori pari a  $d = 1.38 \mu m$  (quindi  $d/\Lambda = 0.6$ ). La geometria della struttura analizzata è mostrata in figura 5.3. Questa struttura risulta essere monomodale per le lunghezze d'onda di pompa e segnali. Anche in questo caso è stata studiato solo un quarto dell'intera sezione trasversa della fibra. La *mesh* generata per l'analisi modale attraverso il *FEM* è mostrata in figura 5.3. È da notare che la *mesh* è particolarmente fitta nelle interfacce tra silice e aria, infatti è in queste zone che si hanno le maggiori variazioni dei campi elettromagnetici, inoltre se i fori, anche solo in parte, sono compresi



**Figura 5.23:** Geometria della sezione trasversale della fibra a cristalli fotonici, con un aggio della zona drogata pari a  $2 \mu m$ .

nel raggio della zona drogata, si determina un gradino nella concentrazione del drogante, poichè, come è ovvio, nell'aria non possono risiedere gli ioni d'erbio. Sono state utilizzate le *cross sections* già mostrate per la fibra *step* in figura 5.3, con i parametri delle *lorentziane* necessarie per "fittarle" riferiti nella tabella 5.1; mentre la *cross section* di assorbimento della pompa è  $\sigma_{13} = 2.73 \times 10^{-25} m^2$ . Sono stati trascurati i fenomeni di *up-conversion* e *cross relaxation*. Il tempo di vita medio degli ioni che si trovano allo stato metastabile è pari a  $\tau_{21} = 10 ms$ . È stato considerato un unico segnale di ingresso alla lunghezza d'onda di  $1560 nm$ , con potenza iniziale  $P_s = 1 \mu W$ , mentre la potenza iniziale della pompa è  $P_p = 100 mW$ . La concentrazione del drogante è stata assunta costante e pari ad  $N_T = 1.74 \times 10^{25} ioni/m^3$ . Le simulazioni sono state ripetute per diversi valori della lunghezza  $L$  dell'amplificatore e per diversi valori del raggio del drogante  $r_d$ , compresi tra  $0.5 \mu m$  e  $4 \mu m$ . Quando  $r_d$  è maggiore di  $\Lambda - d/2 = 1.61 \mu m$ , la zona dro-

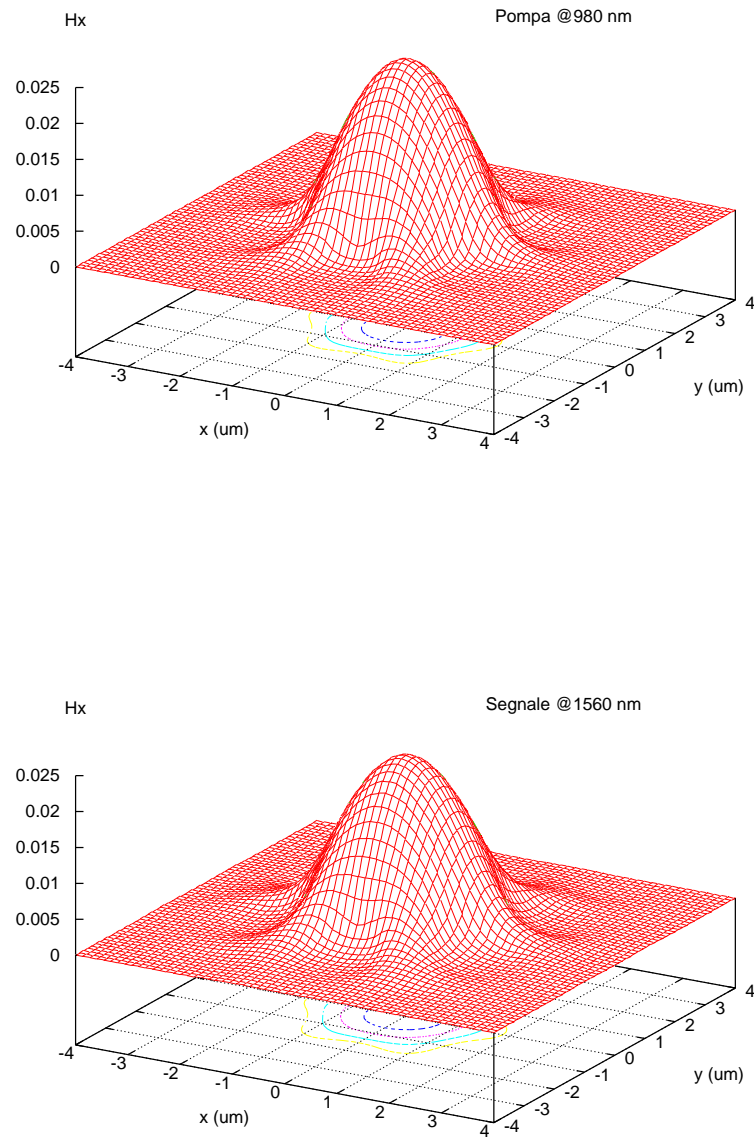


**Figura 5.24:** Particolare della *mesh* relativa al quarto di sezione della fibra a cristalli fotonici.

gata si sovrappone ai fori d'aria del primo anello. Ovviamente in questi casi EDH15AMPLI realizza le simulazioni imponendo che all'interno dei fori non ci siano ioni d'erbio.

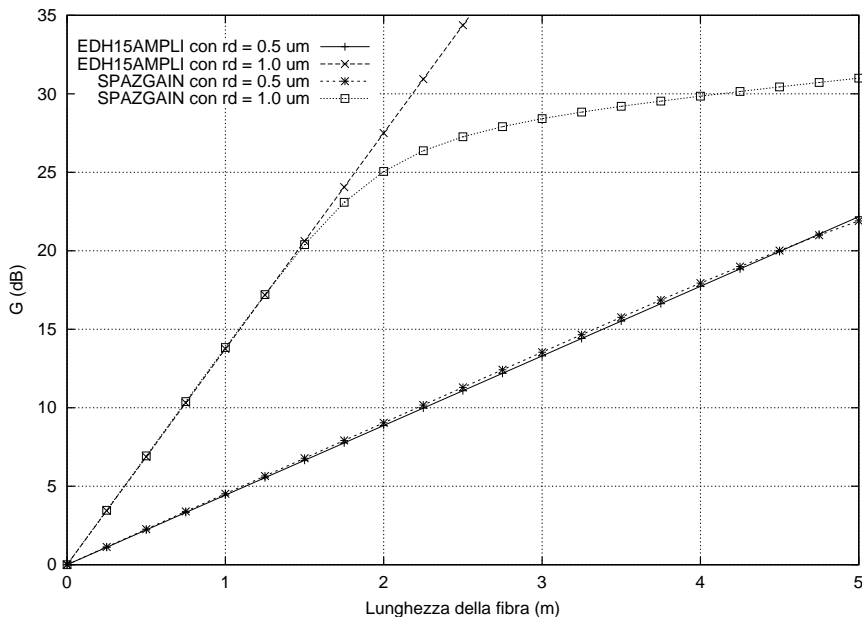
La figura 5.25 mostra il buon confinamento della potenza di pompa e segnale all'interno del primo anello di fori. Questa condizione garantisce degli integrali di sovrapposizione tra intensità e drogante elevati, quindi una grande efficienza dell'amplificatore.

I risultati delle simulazioni sono mostrati nelle figure 5.26 e 5.27. La prima evidenza, come per le precedenti strutture studiate, che EDH15AMPLI ottiene risultati migliori su amplificatori di lunghezza ridotta. Questo amplificatore essendo più efficiente dell'amplificatore realizzato sulla fibra *step* visto nella sezione 5.1, assorbe la pompa in un tratto di fibra più corto, perciò le densità di popolazione  $N_1$  ed  $N_2$  subiscono variazioni significative per  $z$  minori. La



**Figura 5.25:** Andamento della componente dominante del campo magnetico  $H_{11}^x$ , per le lunghezze d'onda di pompa e segnale, che si propagano all'interno della PCF.

conseguenza è che i risultati ottenuti con EDH15AMPLI hanno validità in una minore estensione delle lunghezze degli amplificatori. È importante notare che si ottengono comportamenti diversi variando l'ampiezza della zona drogata. Infatti se  $r_d$  è piccola molta potenza, sia di pompa che di segnale, cade al di fuori della zona drogata: il sistema mantiene la condizione di inversione di popolazione iniziale per un tratto maggiore della fibra ed i valori del guadagno  $G_{dB}$  stimati da EDH15AMPLI sono accurati. La figura 5.26 mostra

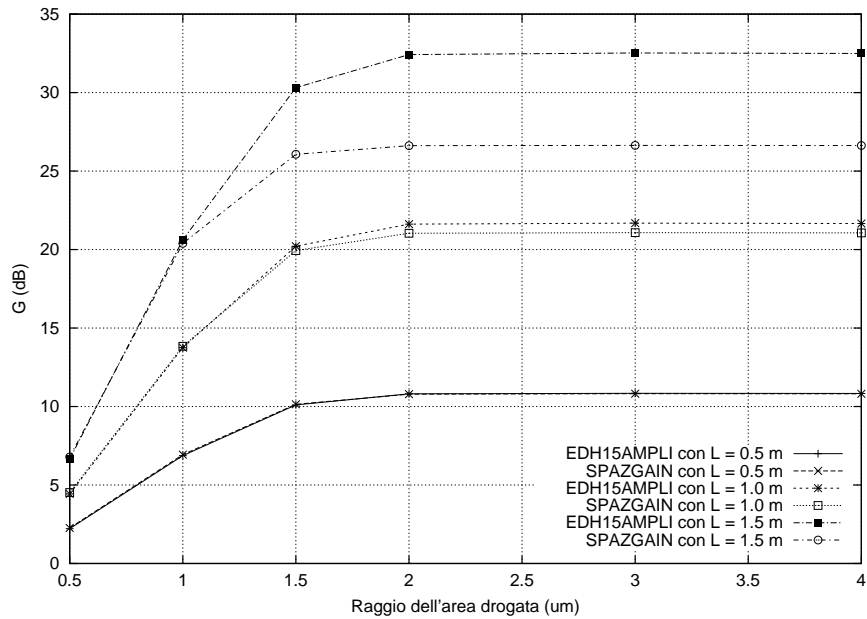


**Figura 5.26:** Valori di guadagno  $G_{dB}$  in funzione della lunghezza  $L$  della PCF triangolare drogata con erbio, graficati per due diversi valori del raggio della zona drogata:  $r_d = 0.5 \mu m$  ed  $r_d = 1.0 \mu m$ .

che per  $r_d = 0.5 \mu m$  c'è grande accordo tra i risultati ottenuti coi due diversi simulatori, mentre per  $r_d = 1.0 \mu m$ , oltre la lunghezza  $L = 1.5 m$  i risultati tendono a divergere.

La figura 5.27 mostra che aumentando l'estensione della zona drogata,

la differenza tra i valori di guadagno  $G_{dB}$  stimati dai due simulatori in un primo tratto è nulla, in seguito subisce un aumento ed infine tende ad essere costante. Questi diversi andamenti trovano riscontro nelle seguenti tre diverse



**Figura 5.27:** Valori di guadagno  $G_{dB}$  al variare del raggio della zona drogata, graficati per tre diversi valori della lunghezza  $L$  dell'amplificatore:  $L = 0.5 m$ ,  $L = 1.0 m$  ed  $L = 1.5 m$ .

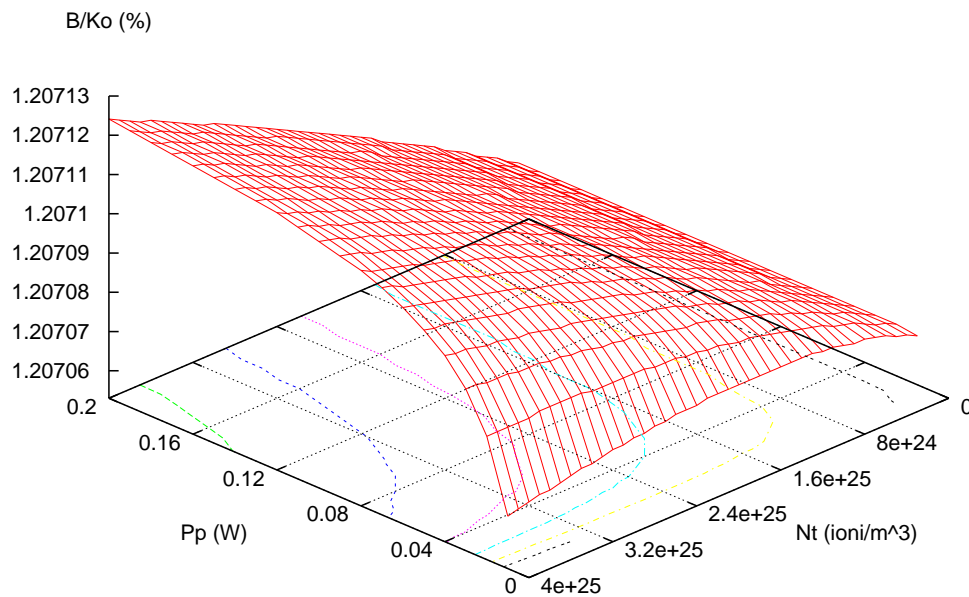
situazioni:

- l'area drogata è piccola rispetto la larghezza della campana dell'intensità di pompa, quindi, dove è presente il drogante, quest'ultima è molto elevata, il sistema mantiene la massima inversione di popolazione e i valori di guadagno  $G_{dB}$  stimati dai due diversi simulatori sono identici.
- l'area drogata si sovrappone alle code della campana dell'intensità di pompa, il sistema non mantiene la condizione di massima inversione di popolazione su tutta la sezione trasversa; nella zona periferica,  $N_1$

ed  $N_2$  subiscono una variazione apprezzabile lungo la coordinata di propagazione  $z$ , tanto maggiore, quanto più è grande  $r_d$ , perciò EDH15AMPLI sovrastima  $G_{dB}$ .

- l'area drogata si sovrappone completamente alla campana dell'intensità del segnale, aumentando ulteriormente  $r_d$ , il sistema non altera le sue condizioni e i valori di guadagno  $G_{dB}$ , forniti dai due diversi simulatori, risultano costanti.

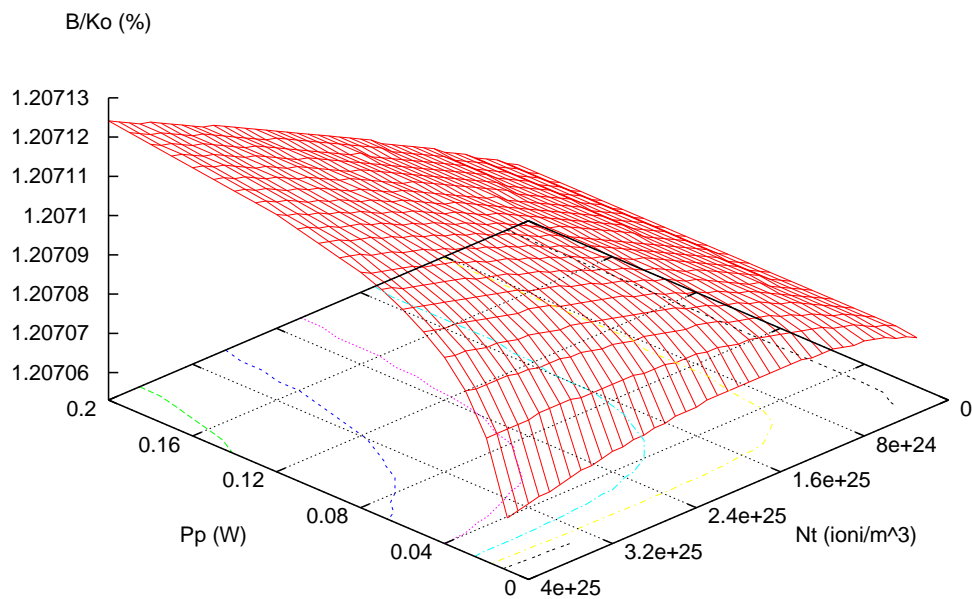
Ovviamente la differenza tra le stime dei due simulatori è tanto maggiore quanto più è lungo l'amplificatore.



**Figura 5.28:** Variazione percentuale di  $\beta/k_0$  nella PCF, dovuta alla presenza del drogante, al variare della concentrazione del drogante  $N_T$  e della potenza della pompa  $P_p$ , con  $P_s = 1 \mu W$ .



In figura 5.28 è graficato l'andamento della variazione percentuale della parte immaginaria dell'autovalore del problema  $\beta/k_0$ , in funzione della concentrazione del drogante  $N_T$  e della potenza di pompa  $P_p$ . Le variazioni sono intorno all'1.207%, maggiori di quelle ottenute per la fibra *step*, mostrate in figura 5.13. Dal confronto tra le due figure si nota che nel caso della *step*, le variazioni maggiori di  $\Delta(\beta/k_0)$  in funzione della concentrazione del drogante  $N_T$ , si ottengono per valori della potenza di pompa  $P_p$  bassi, mentre per la *PCF* le variazioni più apprezzabili sono in corrispondenza di potenze di pompa  $P_p$  elevate.

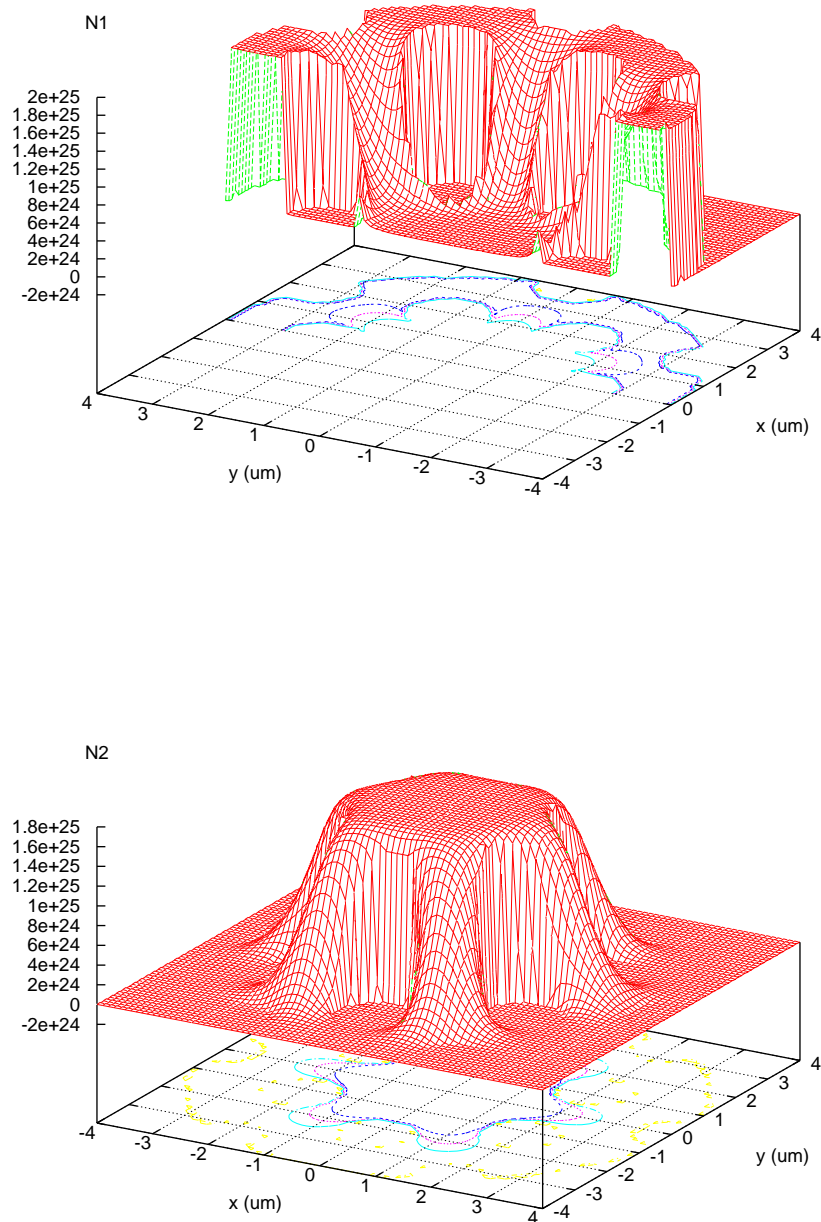


**Figura 5.29:** Variazione percentuale di  $\beta/k_0$  nella *PCF*, dovuta alla presenza del drogante, al variare della concentrazione del drogante  $N_T$  e della potenza della pompa  $P_p$ , con  $P_s = 10 \mu W$ .

Lo stesso tipo di grafico è stato realizzato anche per diverse potenze del segnale di ingresso. In figura 5.29 è graficato il caso in cui  $P_s = 10 \mu W$ . Dal confronto dei due grafici non si nota nessuna differenza, a dimostrazione che nei limiti di applicabilità del modello  $z$ -invariante, la potenza del segnale di ingresso deve essere piccola ed in particolare non deve determinare variazioni apprezzabili delle densità di popolazione  $N_1$  ed  $N_2$ .

Nella figura 5.30 sono mostrati gli andamenti delle densità di popolazione dei livelli energetici fondamentale e metastabile,  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$ , sulla sezione trasversa della *PCF* triangolare. In particolare il grafico relativo ad  $N_1(x, y)$  è rappresentato solamente su metà sezione, per renderne possibile la visione della parte interna. Si nota come nella zona centrale della fibra l'inversione di popolazione è praticamente completa, questa condizione è mantenuta su di un'area abbastanza estesa della sezione (pressappoco un cerchio di raggio  $1.5 \mu m$ ). Ciò è spiegato grazie al buon confinamento dell'intensità della pompa all'interno del primo anello di fori d'aria. Come è ovvio in corrispondenza dei fori stessi, non essendo presente drogante,  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$  sono nulle. L'estensione della zona drogata è stata scelta tale che ricoprisse completamente le campane delle intensità della pompa e del segnale, infatti, nelle zone periferiche della sezione trasversa, l'inversione di popolazione diminuisce con un gradiente molto elevato, fino ad annullarsi dove non c'è più la presenza della potenza di pompa.

Questo tipo di grafico è molto utile per stabilire il raggio della superficie drogata  $r_d$ , ottimo per la struttura in esame. Infatti, facendo riferimento alle figure 2.14(a)(b)(c)(d)(e), se  $r_d$  è troppo grande, la pompa viene assorbita in una distanza breve, però si ottengono potenze  $P_s$  del segnale più basse; al contrario, se  $r_d$  è troppo piccola la potenza di pompa è assorbita in un tratto di fibra lungo, per cui la lunghezza  $L$  dell'amplificatore risulta elevata.



**Figura 5.30:** Andamento delle popolazioni  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$  sulla sezione trasversa della PCF triangolare, con il raggio dell'area drogata  $r_d = 4 \mu m$ , profilo della concentrazione costante pari ad  $N_T = 1.74 \times 10^{25}$  ioni/ $m^3$  e potenza di pompa  $P_p = 100$  mW.

La figura 5.30 aiuta la scelta del compromesso: drogando solamente nella zona centrale della fibra, dove le densità di popolazione  $N_1(x, y)$  ed  $N_2(x, y)$  sono circa costanti, la porzione della campana dell'intensità del segnale che si sovrappone alla zona drogata, trova una elevata inversione di popolazione, rendendo efficiente l'amplificazione.



# Conclusioni

Il lavoro che si è concluso con questa tesi di laurea evidenzia come l'utilizzo di modelli teorici abbia un ruolo fondamentale nello studio e nel progetto degli amplificatori ottici, realizzati con guide d'onda, fibre ottiche o fibre a cristalli fotonici, drogate con erbio. La complessità dei meccanismi fisici, che stanno alla base del funzionamento di tali dispositivi, porta a modelli teorici complessi, la cui soluzione delle equazioni richiede quasi sempre l'impiego delle tecniche numeriche. Come conseguenza si ha che i simulatori hanno due forti limitazioni: i tempi di calcolo molto elevati e la grande occupazione di memoria. Il primo problema incide sulla quantità di simulazioni che è possibile realizzare in un dato lasso di tempo; mentre il secondo limita il numero massimo di elementi utilizzabili, per rappresentare la struttura, tramite il *FEM*, riducendo, quindi, l'accuratezza con cui è possibile studiare una determinata struttura. Per le geometrie studiate il numero di elementi a disposizione è stato sufficiente, ma strutture più complesse potrebbero essere analizzate con minore precisione.

In tale contesto, il simulatore implementato in questo lavoro di tesi, per alcune tipologie di analisi, riduce notevolmente i tempi di calcolo, rispetto a quello preesistente; mentre aumenta di circa il 30% l'occupazione di memoria. Questo è dovuto al fatto che *EDH15AMPLI* è un simulatore basato

su grandezze complesse, mentre SPAZGAIN utilizza grandezze reali, perciò la medesima grandezza, nel primo ha un'occupazione di memoria doppia che nel secondo simulatore. Le simulazioni per cui si ha la riduzione del tempo di calcolo è più importante, sono quelle su di un singolo canale in ingresso (un segnale ad un'unica lunghezza d'onda), infatti EDH15AMPLI imposta e risolve il problema elettromagnetico, cioè ricava l'autovalore e l'autovettore, per ogni segnale di ingresso a diversa lunghezza d'onda: i tempi di simulazione crescono quasi linearmente con il numero di canali. SPAZGAIN, invece, necessita della conoscenza del campo su di una sola lunghezza d'onda dello spettro dei segnali, in questo caso avere un canale in più in ingresso significa introdurre una ulteriore equazione di propagazione: i tempi di simulazione non crescono significativamente.

Il simulatore basato sull'ipotesi  $z$ -invariante fornisce soluzioni approssimate, in particolare si sono stabiliti i campi entro cui tale simulatore fornisce risultati validi. Fino ad ora è stata fatta l'ipotesi di fibra "corta", intendendo la fibra, lungo la cui coordinata di propagazione  $z$ , mantiene le densità di popolazione costanti; questa lunghezza varia con i parametri di ingresso delle diverse simulazioni. Introducendo una definizione di lunghezza normalizzata della fibra, è stato possibile stabilire empiricamente i limiti entro cui è possibile definire una fibra come "corta":

$$Z = L\sigma_{21}N_T < 10$$

dove  $Z$  è la lunghezza normalizzata,  $L$  è la lunghezza effettiva,  $\sigma_{21}$  è la *cross section* di emissione ed  $N_T$  è la concentrazione del drogante. Entro i suddetti limiti di validità del modello  $z$ -invariante, i risultati ottenuti sono in grande accordo con quelli ricavati attraverso il modello spaziale e, dove è

stato possibile il confronto, con i risultati presenti in letteratura.

I vantaggi del modello proposto non si limitano ai ridotti tempi di calcolo, infatti esso permette di descrivere, oltre al comportamento in termine di amplificazione, anche il comportamento non lineare del mezzo, dovuto alla presenza del drogante. In particolare viene realizzato il calcolo della costante di propagazione complessa del modo, sia nel mezzo imperturbato, che nel mezzo perturbato dagli ioni d'erbio. Questa caratteristica deriva dal calcolo diretto della suscettività complessa. Un possibile miglioramento da apportare al codice del simulatore è l'implementazione di procedure che permettano lo studio di sistemi in regime di multimodalità, sia per la lunghezza d'onda della pompa, che per quelle dei segnali.

È importante sottolineare che, per lo studio e la progettazione degli amplificatori ottici, il modello  $z$ -invariante non può sostituirsi completamente al modello spaziale. Tuttavia, in fase di ricerca, può costituire un prezioso strumento, per una prima descrizione del comportamento dei dispositivi. La ricerca dovrà essere poi integrata all'utilizzo di modelli più accurati e soprattutto ad una estesa attività sperimentale.





# Bibliografia

- [Zob97] M. Zoboli, *Lezioni di campi elettromagnetici*. Parma: Edizioni Santa Croce, 1997.
- [Her99] A.P. López-Barbero and H.E. Hernández-Figueroa, “Modeling Erbium-Doped Optical Amplifiers by Finite Elements Modal Analysis”, *Microwave and Optoelectronics Conference*, vol. 1, pp. 294-297, 1999.
- [Gai93] F.C.F. Di Pasquale, A. Gaibazzi and M. Zoboli, “Analysis of Erbium-Doped Fiber Amplifiers by Combined Runge-Kutta and Finite-Element Methods”, *Optical Communications*, vol. 4, no. 3, pp. 121-130, may-june 1993.
- [Zob93] F.C.F. Di Pasquale and M. Zoboli, “Analysis of Erbium-Doped Waveguide Amplifiers by a Full-Vectorial Finite-Element Method”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 11, no. 10, pp. 1565-1574, october 1993.
- [Zob94] F.C.F. Di Pasquale, M. Federighi, I. Massarek and M. Zoboli, “Finite-element modeling of silica waveguide amplifiers with high erbium concentration”, *Journal of Quantum Electronics*, vol. 30, no. 5, pp. 1277-1282, may 1994.

- [Des94] E. Desurvire, *Erbium-Doped fiber Amplifiers: Principles and Applications*. New York: J. Wiley & Sons, 1994.
- [Bja93] A. Bjarklev, *Optical Fiber Amplifiers: Design and System Applications*. Boston: Artech House, 1993.
- [Sve89] O. Svelto, *Principles of Lasers, third edition*. New York: Plenum Press, 1989.
- [Des90] E. Desurvire, "Study of Complex Atomic Susceptibility of Erbium-Doped Amplifiers", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 8, no. 10, pp. 1517-1527, October 1990.
- [Fed95] F.C.F. Di Pasquale and M. Federighi, "Modelling of uniform and pair-induced upconversion mechanisms in high-concentration erbium-doped silica waveguides", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 13, no. 9, pp. 1858-1864, september 1995.
- [Bli95] J. Nilsson, P. Blixt, B. Jaskorzynska and J. Babonas, "Evaluation of parasitic upconversion mechanisms in  $Er^{3+}$ -doped silica-glass fibers by analysis of fluorescence at 980 nm", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 13, no. 3, pp. 341 -349, march 1995.
- [DiP93] F.C.F. Di Pasquale, *Caratterizzazione teorica e sperimentale di amplificatori ottici in fibra e guide drogate con terre rare per ottica integrata*. Disertazione presentata per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca, Università di Parma, 1993.
- [DiP01] C.E. Chryssou, F.C.F. Di Pasquale and C.W. Pitt, "Improved gain performance in  $Yb^{3+}$ -sensitized  $Er^{3+}$ -doped alumina ( $Al_2O_3$ ) channel optical waveguide amplifiers", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 19, no. 3, pp. 345-349, march 2001.

- [Zha97] K.E. Alameh, M.A. Minasian and Y. Zhao, “A Numerical Model for the Complex Susceptibility of Saturated Erbium-Doped Amplifiers”, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 33, no. 5, pp. 855-860, april 1997.
- [Min91] W.J. Miniscalco and R.S. Quimby, “General procedure for the analysis of cross-sections”, *Optic Letters*, vol. 16, no. 4, pp. 258-260, 1991.
- [Fer02] D. Ferrarini, *Analisi numerica delle perdite nelle fibre a cristallo fotonico*. Tesi di laurea, Università di Modena e Reggio Emilia, a.a. 2001/2002.
- [Bul01] V. Bulgarelli, *Simulatori per lo studio tridimensionale di problemi deterministici*. Tesi di laurea, Università di Modena e Reggio Emilia, a.a. 2000/2001.
- [Har90] Harwell Laboratory, *Harwell Subroutine Library Specifications*. Oxfordshire: OX11 ORA, 1990.
- [Cha00] S.J. Chapman, *Fortran 90/95, guida alla programmazione*. Milano: McGraw-Hill, 2000.
- [Ser89] E. Sernesi, *Geometria 1*, Torino: Bollati Boringhieri, 1989.